

$(FP)_n$ -Eigenschaften der verallgemeinerten Houghton-Gruppen

Diplomarbeit
von
Heike Sach

Fachbereich Mathematik
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/Main
Januar 1992

Einleitung

Eine Gruppe G heißt *vom Typ* $(\text{FP})_n$ (bzw. $(\text{FP})_\infty$), wenn \mathbb{Z} als $\mathbb{Z}G$ -Modul eine projektive Auflösung besitzt, die in jeder Dimension $\leq n$ (bzw. in allen Dimensionen) endlich erzeugt ist (vgl. [Bi] oder [Br2]). Zum Beispiel ist eine Gruppe G genau dann vom Typ $(\text{FP})_1$, wenn sie endlich erzeugt ist, und G ist vom Typ $(\text{FP})_2$, falls sie endlich präsentiert ist. (Die Umkehrung der letzten Behauptung konnte bisher nicht gezeigt werden). Weiterhin ist jede endliche Gruppe vom Typ $(\text{FP})_\infty$.

Ausgangspunkt dieser Diplomarbeit bildet eine Folge von Gruppen H_n ($n \geq 1$), die von C. Houghton eingeführt wurde (vgl. [Hou]). Betrachtet man die Menge $S = \mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$, so ist H_n die Gruppe aller Permutationen h von S , für die ein $x_0 \in \mathbb{N}$ sowie ein n -Tupel $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ existiert, sodaß $(x, i)h = (x + m_i, i)$ für alle $x \geq x_0$ erfüllt ist. Stellt man sich die Menge $\mathbb{N} \times \{i\}$ für $i = 1, \dots, n$ jeweils auf einem Zahlenstrahl angeordnet vor, so bedeutet diese Forderung, daß die Elemente des i -ten Zahlenstrahles ab einer Stelle x_0 um m_i verschoben werden. Die Permutationen aus H_n verhalten sich somit für hinreichend große x wie eine Translation.

Die Gruppe H_n besitzt besondere Endlichkeitseigenschaften: Wie von K.S. Brown in [Br1] gezeigt wurde, ist H_n vom Typ $(\text{FP})_{n-1}$, jedoch nicht vom Typ $(\text{FP})_n$ und für $n \geq 3$ endlich präsentiert. Beispiele für Gruppen mit solchen Eigenschaften liegen nicht auf der Hand, und wir wollen in dieser Arbeit ein weiteres vorstellen, das durch eine Verallgemeinerung von Houghton's Gruppen entstanden ist.

Den Ansatzpunkt der Verallgemeinerung bildet die der Gruppe H_n zugrundeliegende Menge $\mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$. Für $i = 1, \dots, n$ ersetzen wir $\mathbb{N} \times \{i\}$ durch $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \{i\}$. Die Elemente aus $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \{i\}$ kann man sich als ganzzahlige Gitterpunkte eines Quadranten innerhalb eines kartesischen Koordinatensystemes vorstellen, und die neue Menge $S = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \{1, \dots, n\}$ befindet sich gemäß dieser Auffassung in der disjunkten Vereinigung von n Quadranten.

Betrachtet werden nun spezielle Permutationen dieser Menge $S = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \{1, \dots, n\}$, deren Hauptmerkmal – in Analogie zu den Houghton-Gruppen – darin besteht, ab einer Stelle $p_0 = (x_0, y_0)$ (d.h. für alle $((x, y), i)$ aus S mit $x \geq x_0$ und $y \geq y_0$) in jedem der n Quadranten eine Translation zu sein.

Im Unterschied zur Menge $\mathbb{N} \times \{i\}$ gibt es jedoch beliebig viele Translationsrichtungen, die das „Gitter“ $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \{i\}$ invariant lassen. Aus diesem Grunde stellen wir zwei verschiedenen Typen von Gruppen als mögliche Verallgemeinerung der Houghton-Gruppen vor:

Zum einen die Gruppen G_n , bei denen die ab einer Stelle p_0 beginnende Translation in jedem der Quadranten nur in *einer* Richtung, nämlich in Richtung der Winkelhalbierenden, stattfindet, und zum anderen die Gruppen \tilde{G}_n , bei denen hinsichtlich dieser Translationen jede (ganzzahlige) Richtung zugelassen wird.

Es stellt sich die Frage, welche der beiden Gruppentypen die „natürlichere“ Verallgemeinerung der Gruppen H_n ist. Für G_n spricht, daß bei den Houghton-Gruppen ebenfalls nur eine mögliche Translationsrichtung (entlang des Zahlenstrahles) vorhanden ist. Andererseits liegt es nahe, bei Erweiterung der Menge $\mathbb{N} \times \{i\}$ auf $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \{i\}$ alle dadurch zusätzlich entstehende Translationsrichtungen auszuschöpfen.

Wie dem auch sei ist es als Hauptresultat dieser Arbeit gelungen, mit der von K.S. Brown im Falle der Houghton-Gruppen angewandten Methode nachzuweisen, daß G_n vom Typ $(FP)_{n-1}$, nicht vom Typ $(FP)_n$ und für $n \geq 3$ endlich präsentiert ist (vgl. Satz 4.9).

Dagegen ist der Versuch einer Übertragung des Beweises auf die Gruppen \tilde{G}_n gescheitert, was seine Ursache im wesentlichen in der Notwendigkeit von zwei (anstelle von nur einer) Erzeugenden für die Translationen von $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ hatte. Allerdings kann man zeigen, daß es eine exakte Sequenz von Gruppen

$$0 \longrightarrow G_n \longrightarrow \tilde{G}_n \longrightarrow \mathbb{Z}^{n-1} \longrightarrow 0$$

gibt, woraus sich schließen läßt, daß \tilde{G}_n zumindest vom Typ $(FP)_{n-1}$ und für $n \geq 3$ endlich präsentiert ist. Ob \tilde{G}_n ebenfalls die Eigenschaft besitzt, nicht vom Typ $(FP)_n$ zu sein, bleibt offen und kann vielleicht mit anderen Methoden geklärt werden.

Es folgt ein Überblick:

Im ersten Abschnitt stellen wir ein Kriterium von K.S. Brown für die $(FP)_n$ - Eigenschaft sowie für die endliche Präsentierbarkeit einer Gruppe G vor, und geben eine auf unsere Anwendungen zugeschnittene kombinierte Version beider Kriterien an:

Zu festem $n \geq 1$ sei ein zusammenziehbarer CW -Komplex X gegeben, auf dem die Gruppe G durch Homöomorphismen operiert, welche die Zellen von X permutieren, sodaß der Stabilisator jeder p -Zelle σ aus X vom Typ $(FP)_n$ und im Falle $n \geq 3$ endlich präsentiert ist. Weiterhin sei $\{X_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Filtrierung von X , sodaß jedes X_j endlich ist mod G .

Entsteht für alle hinreichend großen j X_{j+1} aus X_j bis auf Homotopie durch Hinzufügen von n -Zellen, so ist G vom Typ $(FP)_{n-1}$ und nicht vom Typ $(FP)_n$. Im Falle $n \geq 3$ ist G endlich präsentiert.

Als Grundlage für die weitere Arbeit wird die Anwendung dieses Kriteriums im Falle der Houghton-Gruppen erläutert.

Der zweite Abschnitt enthält eine formale Beschreibung der Gruppen G_n und \tilde{G}_n , sowie den Nachweis, daß die Houghtongruppe H_n sowohl als Untergruppe wie auch als Faktorgruppe von G_n und \tilde{G}_n vorkommt. Darüberhinaus zeigen wir, daß G_n ein Normalteiler von \tilde{G}_n ist, und daß die Faktorgruppe von \tilde{G}_n nach G_n isomorph zur Gruppe \mathbb{Z}^{n-1} ist.

Im dritten Abschnitt beginnen wir mit der Herstellung der Voraussetzungen des obigen Kriteriums für die Gruppen G_n . Es wird ein zusammenziehbarer Simplicialkomplex konstruiert, auf dem G_n simplicial operiert, wobei die Stabilisatoren dieser Operation jeweils eine Untergruppe von endlichem Index enthalten, die isomorph zu einer der Gruppen H_m für ein $m \geq n + 1$ ist. (Somit sind die Stabilisatoren vom Typ $(FP)_n$ und im Falle $n \geq 3$ zusätzlich endlich präsentiert, vgl. Lemma 1.4).

Im letzten Abschnitt geben wir eine Filtrierung dieses Simplicialkomplexes an, und weisen die im Kriterium hinsichtlich der Filtrierung geforderten Eigenschaften nach.

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbereitungen	1
1.1	Endlichkeitskriterien	1
1.2	Topologische Eigenschaften partiell geordneter Mengen	4
1.3	Erläuterung der Beweismethode anhand der Houghton-Gruppen	5
2	Verallgemeinerung der Houghton-Gruppen	9
2.1	Beschreibung der Gruppen G_n und \tilde{G}_n	10
2.2	G_n als Normalteiler von \tilde{G}_n	15
2.3	Die Houghton-Gruppe als Untergruppe von G_n	15
3	Konstruktion eines G_n-Komplexes	18
3.1	Die partiell geordnete Menge \mathcal{M}	18
3.2	Untersuchung der Operation von G_n auf $ \mathcal{M} $	21
3.2.1	Eigenschaften der Stabilisatoren	21
3.2.2	Eigenschaften des Grades	27
3.3	Der Simplicialkomplex $ \mathcal{M}^n $	33
4	Filtrierung von \mathcal{M}^n	34
4.1	Die Unterkomplexe der Filtrierung mod G_n	34
4.2	Homotopieeigenschaften von $ \mathcal{M}^{[n,k]} \subseteq \mathcal{M}^{[n,k+1]} $	36
4.2.1	Eine Überdeckung von $ \mathcal{M}_{<\alpha}^n $	36
4.2.2	Homotopietyp des Nerves	39

1 Vorbereitungen

1.1 Endlichkeitskriterien

Wir stellen in diesem Abschnitt zwei Endlichkeitskriterien vor, zum einen für die $(FP)_n$ -Eigenschaft und zum anderen für die endliche Präsentierbarkeit einer Gruppe G . Dabei setzen wir stets $n \geq 1$ voraus.

In beiden Fällen handelt es sich um notwendige und hinreichende Kriterien, die gewisse topologische Eigenschaften eines CW -Komplexes X , auf dem die Gruppe in geeigneter Weise operiert, miteinander verbinden. Sie wurden von K.S. Brown in seiner Arbeit „Finetness properties of groups“ ([Br1]) entwickelt, und wir geben daraus eine kurze Zusammenfassung der Abschnitte 1-3. Es werden im wesentlichen nur die zur Formulierung der Kriterien nötigen Begriffe erläutert, ohne auf Beweise näher einzugehen. Für eine ausführliche Darstellung der Resultate sei auf die oben erwähnte Arbeit verwiesen.

Definition: Sei G eine Gruppe. Dann versteht man unter einem G -Komplex einen CW -Komplex X , auf dem G durch Homöomorphismen operiert, welche die Zellen von X permutieren.

Zum Beispiel ist jeder Simplicialkomplex X , auf dem G simplicial operiert, ein G -Komplex. Wir benötigen G -Komplexe mit speziellen Eigenschaften:

Definition: Ein G -Komplex X heißt n -gut für die Gruppe G , wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Die reduzierten Homologiegruppen $\widetilde{H}_i(X) = 0$ für alle $i < n$
- (ii) Für alle $0 \leq p \leq n$ ist der Stabilisator $\text{Stab}_G(\sigma)$ jeder p -Zelle σ aus X vom Typ $(FP)_{n-p}$.

Gibt es einen n -guten G -Komplex X mit endlichem n -dimensionalen Gerüst mod G , so folgt die $(FP)_n$ -Eigenschaft von G (vgl. Proposition 1.1, [Br]).

Ein ähnliches Ergebnis liegt für die endliche Präsentierbarkeit vor: Bei speziellen G -Komplexen X kann man schließen, daß G endlich präsentiert ist, falls X ein endliches 2-Gerüst mod G besitzt (s. Proposition 3.1, [Br]).

Diese Kriterien versagen im Falle eines unendlichen n - bzw. 2-Gerüsts mod G . Es ist aber möglich, einen G -Komplex X in Unterkomplexe zu zerlegen, die alle ein endliches n -Gerüst mod G haben. In der folgenden Definition wird beschrieben, von welcher Form eine solche Zerlegung sein muß, um daraus Informationen über die Endlichkeits-eigenschaften von G gewinnen zu können.

Definition: Eine *Filtrierung* eines G -Komplexes X besteht aus einer Familie G -invarianter Unterkomplexe $\{X_\alpha\}_{\alpha \in D}$ mit einer gerichteten Indexmenge D (d.h. $\forall \alpha, \beta \in D \exists \gamma \in D$ mit $\alpha \leq \gamma$ und $\beta \leq \gamma$), sodaß für $\alpha \leq \beta$ $X_\alpha \subseteq X_\beta$ und

$X = \bigcup_{\alpha \in D} X_\alpha$ ist. Die Filtrierung heißt von *endlichem n -Typ*, falls das n -Gerüst jedes Unterkomplexes X_α endlich ist mod G .

Bemerkung: Es existiert immer eine Filtrierung von endlichem n -Typ, zum Beispiel die Familie aller Unterkomplexe von X mit endlichem n -Gerüst mod G , geordnet durch Inklusion. Darüberhinaus kann erreicht werden, daß $\bigcap_{\alpha \in D} X_\alpha \neq \emptyset$ ist. Andernfalls ersetzt man für ein festes $v \in X$ die Indexmenge D durch $D' := \{\alpha \in D \mid v \in X_\alpha\}$ (vgl. [Br], Abschnitt 3). Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß es in allen X_α einen gemeinsamen Basispunkt v gibt.

Aus einer solchen Filtrierung von X ergeben sich direkte Systeme von Gruppen, zum einen für jedes $i \geq 0$ das System der reduzierten Homologiegruppen $\{\widetilde{H}_i(X_\alpha)\}_{\alpha \in D}$ und zum anderen das System der Fundamentalgruppen $\{\pi_1(X_\alpha, v)\}_{\alpha \in D}$ bzgl. gemeinsamem Basispunkt v . Die $(FP)_n$ -Eigenschaft bzw. die endliche Präsentierbarkeit einer Gruppe G sind unter bestimmten Voraussetzungen äquivalent zu gewissen Eigenschaften dieser Systeme von Gruppen.

Definition: Ein direktes System von Gruppen $\{A_\alpha\}_{\alpha \in D}$ heißt *im wesentlichen trivial*, wenn es zu jedem α aus D ein $\beta \geq \alpha$ gibt, sodaß die Abbildung $A_\alpha \rightarrow A_\beta$ trivial ist.

Mit diesem Begriff lassen sich nun die Endlichkeitskriterien formulieren:

Satz 1.1 *Ist X ein n -guter G -Komplex mit einer Filtrierung von endlichem n -Typ, so ist G genau dann vom Typ $(FP)_n$, wenn für jedes $i < n$ das direkte System $\{\widetilde{H}_i(X_\alpha)\}$ der reduzierten Homologiegruppen im wesentlichen trivial ist.*

BEWEIS: [Br1], Theorem 2.2 □

Satz 1.2 *Sei X ein einfach zusammenhängender G -Komplex, sodaß die Stabilisatoren der Ecken endlich präsentiert und die der Kanten endlich erzeugt sind. Sei weiterhin $\{X_\alpha\}$ eine Filtrierung von endlichem 2-Typ von X mit gemeinsamem Basispunkt $v \in \bigcap X_\alpha$. Ist G endlich erzeugt, so ist G genau dann endlich präsentiert, wenn das direkte System $\{\pi_1(X_\alpha, v)\}$ im wesentlichen trivial ist.*

BEWEIS: [Br1], Theorem 3.2 □

Wir benutzen in dieser Arbeit die Aussagen von Satz 1.1 und Satz 1.2 in einer kombinierten Form, was unter gewissen Voraussetzungen möglich ist. (vgl. auch [Br1], Corollar 3.3, jedoch sind dort die Voraussetzungen schärfer. Der Beweis läßt sich dennoch unverändert übernehmen).

Korollar 1.3 Zu festem $n \geq 1$ sei ein zusammenziehbarer G -Komplex X gegeben mit der Eigenschaft, daß der Stabilisator jeder p -Zelle σ aus X vom Typ $(\text{FP})_n$ und im Falle $n \geq 3$ endlich präsentiert ist. Weiterhin sei $\{X_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Filtrierung von X , sodaß jedes X_j endlich ist mod G .

Entsteht dann für alle hinreichend große j X_{j+1} aus X_j bis auf Homotopie durch Hinzufügen von n -Zellen, so ist G vom Typ $(\text{FP})_{n-1}$ und nicht vom Typ $(\text{FP})_n$. Im Falle $n \geq 3$ ist G endlich präsentiert.

BEWEIS: G ist vom Typ $(\text{FP})_{n-1}$:

Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Es sei also $n \geq 2$. Aus der Zusammenziehbarkeit von X ergibt sich

$$(1.1) \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ j \in \mathbb{N}}} \widetilde{H}_i(X_j) = 0 \quad \forall i \geq 0.$$

Da sich durch Hinzufügen von n -Zellen die i -dimensionalen Homologiegruppen für alle $i \leq n-2$ nicht verändern, erhält man für alle hinreichend große j und $i = 0, \dots, n-2$

$$\widetilde{H}_i(X_j) \cong \widetilde{H}_i(X_{j+1}).$$

Mit (1.1) folgt daraus $\widetilde{H}_i(X_j) = 0$ für alle hinreichend große j , d.h. das direkte System der reduzierten Homologiegruppen $\{\widetilde{H}_i(X_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ ist für alle $0 \leq i < n-1$ im wesentlichen trivial. Da X und die Filtrierung $\{X_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ von X offensichtlich die Voraussetzungen von Satz 1.1 erfüllen, folgt damit die Behauptung.

G ist endlich präsentiert:

Die endliche Präsentierbarkeit von G im Falle $n \geq 3$ ergibt sich ähnlich, indem man bei der Argumentation anstelle der reduzierten Homologiegruppen die Fundamentalgruppe $\pi_1(X_j)$ benutzt und mit Satz 1.2 schließt.

G ist nicht vom Typ $(\text{FP})_n$:

Da für große j X_{j+1} bis auf Homotopie aus X_j durch Hinzufügen von n -Zellen entsteht, ist die Abbildung $\widetilde{H}_{n-1}(X_j) \rightarrow \widetilde{H}_{n-1}(X_{j+1})$ surjektiv. Der Kern dieser Abbildung ist nicht trivial, denn angenommen durch das Hinzufügen von n -Zellen verschwinden keine $(n-1)$ -dimensionalen Homologieklassen. Dann entstehen neue n -dimensionale Homologieklassen, die durch weiteres Hinzufügen von n -Zellen nicht mehr „ausgelöscht“ werden können. Dies widerspricht der Zusammenziehbarkeit von X . Somit ist für alle großen j $\text{Ker}(\widetilde{H}_{n-1}(X_j) \rightarrow \widetilde{H}_{n-1}(X_{j+1})) \neq 0$, also insbesondere $\widetilde{H}_{n-1}(X_j) \neq 0$. Wegen der Surjektivität obiger Abbildung ergibt sich daraus, daß das System $\{\widetilde{H}_{n-1}(X_j)\}$ nicht im wesentlichen trivial ist, d.h. G ist nicht vom Typ $(\text{FP})_n$. \square

Zum Schluß dieses Abschnittes weisen wir auf einige nützliche Zusammenhänge zwischen Endlichkeitseigenschaften von Gruppen und Untergruppen hin.

Lemma 1.4 Sei G eine Gruppe, $U \leq G$ eine Untergruppe von endlichem Index in G . Dann ist G genau dann vom Typ $(\text{FP})_n$, wenn U es ist.

BEWEIS: [Bi], Proposition 2.5 □

Lemma 1.5 *Sei $0 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Gruppen. Sind N und Q vom Typ $(FP)_n$ (bzw. endlich präsentiert), so ist auch G vom Typ $(FP)_n$ (bzw. endlich präsentiert).*

BEWEIS: Die Aussage über die $(FP)_n$ -Eigenschaft läßt sich analog zu Proposition 2.7 in [Bi] zeigen. Zur endlichen Präsentiertheit vgl. z.Bsp. [Ro], Abschnitt 2.2. □

1.2 Topologische Eigenschaften partiell geordneter Mengen

Einer partiell geordneten Menge M läßt sich in folgender Weise ein Simplicialkomplex $|M|$ zuordnen: Jede Kette der Länge $k, k \geq 0$ in M

$$a_0 < a_1 < \dots < a_k$$

bildet ein k -Simplex (a_0, \dots, a_p) von $|M|$. Die Eckenmenge von $|M|$ besteht somit aus M selbst.

Unter einem Morphismus von partiell geordneten Mengen $f : M \longrightarrow N$ versteht man eine Abbildung, die ordnungserhaltend ist, d.h. für alle a, b aus M mit $a \leq b$ muß auch $f(a) \leq f(b)$ sein. Ein solches f induziert eine simpliciale Abbildung

$$|f| : |M| \longrightarrow |N|,$$

die durch $f(a_0, \dots, a_k) := (f(a_0), \dots, f(a_k))$ gegeben ist.

Bemerkung 1.1: Ist G eine Gruppe, die auf einer partiell geordneten Menge M durch ordnungserhaltende Abbildungen operiert, so induziert dies eine simpliciale Operation von G auf $|M|$. $|M|$ ist also ein G -Komplex (vgl. Abschnitt 1.1).

Es bestehen gewisse Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften der gegebenen Ordnung auf M und den topologischen Eigenschaften von $|M|$. Bezüglich der Zusammenziehbarkeit von $|M|$ gilt (s. [Br1], Abschnitt 4):

Lemma 1.6 *Sei M eine partiell geordnete Menge mit der Eigenschaft, daß für alle a, b aus M ein c existiert mit $a \leq c$ und $b \leq c$ (M gerichtet). Dann ist $|M|$ zusammenziehbar.*

Eine weitere Aussage läßt sich hinsichtlich des Nerves von Überdeckungen machen. Wir benutzen dazu folgendes allgemeine Resultat:

Lemma 1.7 *Sei K ein Simplicialkomplex, der durch eine Familie $\{K_i\}_{i \in I}$ von Unterkomplexen überdeckt wird. Ist jeder endliche Durchschnitt $K_{i_1} \cap K_{i_2} \cap \dots \cap K_{i_n}$ entweder leer oder zusammenziehbar, so besitzt K denselben Homotopietyp wie der Nerv \mathcal{N} dieser Überdeckung.*

BEWEIS: [Bj], Lemma 1.1 □

Definieren wir nun für ein b aus M die Menge

$$M_{\leq b} := \{a \in M \mid a \leq b\}$$

und betrachten zu einer nichtleeren Teilmenge J von M den Simplicialkomplex $S_J := \bigcup_{b \in J} |M_{\leq b}|$, so ergibt sich aus Lemma 1.7

Korollar 1.8 *Sei M eine partiell geordnete Menge, $J \subseteq M$ eine Teilmenge von M . Gibt es zu jeder endlichen Teilmenge $\{b_1, \dots, b_n\}$ von J , die in M nach unten beschränkt ist, eine größte untere Schranke d in M , so ist $S_J = \bigcup_{b \in J} |M_{\leq b}|$ homotopieäquivalent zu dem Nerv \mathcal{N} der Familie $\{|M_{\leq b}|\}_{b \in J}$.*

BEWEIS: Ist zu b_1, \dots, b_n der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^n |M_{\leq b_i}| \neq \emptyset$, so gibt es ein $c \in M$ mit $c \leq b_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Die Menge $\{b_1, \dots, b_n\}$ ist somit nach unten beschränkt, und nach Voraussetzung existiert eine größte gemeinsame untere Schranke d der b_1, \dots, b_n in M . Damit ist $\bigcap_{i=1}^n |M_{\leq b_i}| = |M_{\leq d}|$, also ein Kegel und daher zusammenziehbar. □

1.3 Erläuterung der Beweismethode anhand der Houghton-Gruppen

Wir erinnern kurz an die Definition der Houghton-Gruppen. Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ ist H_n die Gruppe aller Permutationen h der Menge $S = \mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$, für die ein $x_0 \in \mathbb{N}$ sowie ein n -Tupel $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ existiert, sodaß für alle $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$(1.2) \quad (x, i)h = (x + m_i, i) \quad \text{für alle } x \geq x_0.$$

In [Br1] wurde von K.S. Brown gezeigt, daß H_n vom Typ $(FP)_{n-1}$, jedoch nicht vom Typ $(FP)_n$ und für $n \geq 3$ endlich präsentiert ist. Zum Nachweis dieser Endlichkeitseigenschaften hat er das in Abschnitt 1.1 vorgestellte Kriterium benutzt (Korollar 1.3). Die von Brown angewandte Methode zur Herstellung der Voraussetzungen von Korollar 1.3 wird später auf die in Abschnitt 2 definierten Gruppen G_n übertragen. Um einen Einblick in das Verfahren zu erhalten, beschreiben wir im folgenden die wesentlichen Schritte. Einige hierbei aufgestellten Behauptungen werden im weiteren Verlauf der Arbeit (zum Teil in einer allgemeineren Form) bewiesen. In diesen Fällen weisen wir auf die entsprechenden Stellen hin.

Die fettgedruckten Pfeile geben die Translation in der jeweiligen Menge $\mathbb{N} \times \{i\}, i=1,2,3$ an. Der Pfeilanzfang befindet sich an der Stelle, wo die Translation beginnt. Die dünngezeichneten Pfeile kennzeichnen die restliche Permutation, wobei Elemente, von denen kein Pfeil ausgeht, auf sich selbst abgebildet werden. Hier ist $m_1=2, m_2=m_3=-1$ und $x_0=8$.

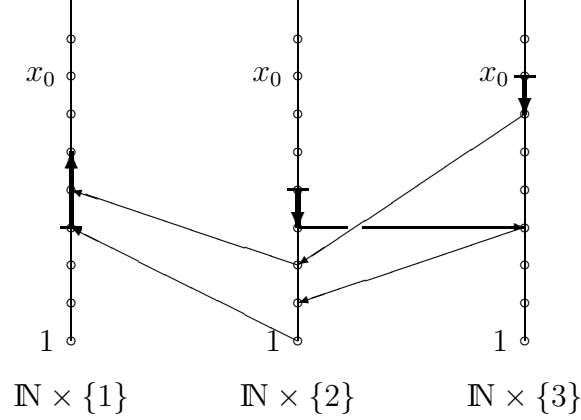


Abbildung 1: Beispiel für ein Element aus H_n ($n = 3$)

Schritt 1: Konstruktion eines H_n -Komplexes

(i) Die partiell geordnete Menge \mathcal{M}

Wir betrachten das Monoid M aller injektiven Abbildungen von S nach S , die (1.2) erfüllen. (M operiert von rechts, d.h. für α, β aus M bedeutet $\alpha\beta$ die Hintereinanderausführung von α gefolgt von β). Ein Element t aus M heißt *Translation*, falls es ein n -Tupel (m_1, \dots, m_n) aus \mathbb{Z}^n gibt, sodaß $(x, i)t = (x + m_i, i)$ für alle (x, i) aus S erfüllt ist. Mit T bezeichnen wir das kommutative Untermomoid von M , das aus allen Translationen besteht. T wird erzeugt von t_1, \dots, t_n , wobei t_i für alle $x \in \mathbb{N}$ definiert ist durch

$$(x, j)t := \begin{cases} (x + 1, i) & \text{für } j = i \\ (x, j) & \text{für } j \in \{1, \dots, n\} - \{i\} \end{cases}.$$

Mit Hilfe von T läßt sich eine *Ordnung* auf M erklären: Für α, β aus M schreiben wir $\alpha \leq \beta$, falls ein t aus T existiert mit $t\alpha = \beta$ (zur Verifikation der Ordnungsaxiome vgl. Abschnitt 3.1).

Mit \mathcal{M} bezeichnen wir die dem Monoid M zugrundeliegende Menge zusammen mit dieser Ordnung. Man kann zeigen, daß es für alle α aus \mathcal{M} ein $t \in T$ gibt mit $\alpha \leq t$. Daraus folgt die Gerichtetheit von \mathcal{M} (vgl. Korollar 3.2), d.h. der der Menge \mathcal{M} zugeordnete Simplicialkomplex $|\mathcal{M}|$ ist zusammenziehbar (s. Lemma 1.6).

(ii) Operation von H_n auf $|\mathcal{M}|$

H_n operiert als Untergruppe von \mathcal{M} durch Rechtsmultiplikation auf \mathcal{M} . Dabei gilt

für alle α aus \mathcal{M} , $t \in T$ und $h \in H_n$

$$(t\alpha)h = t(\alpha h),$$

d.h. die Operation von H_n auf \mathcal{M} ist ordnungserhaltend. Nach Bemerkung 1.1 ist $|\mathcal{M}|$ somit ein H_n -Komplex. Der Stabilisator eines Simplexes aus $|\mathcal{M}|$ ist endlich (ohne Beweis), also endlich präsentiert und sogar vom Typ $(FP)_\infty$.

Schritt 2: Filtrierung von $|\mathcal{M}|$

Für ein α aus \mathcal{M} sei der *Grad* von α , bezeichnet mit $gr(\alpha)$, die größte ganze Zahl k , sodaß es eine Kette der Form $\alpha = \alpha_k > \alpha_{k-1} > \dots > \alpha_0$ in \mathcal{M} gibt. Offensichtlich ist für $\alpha < \beta$ auch $gr(\alpha) < gr(\beta)$, d.h. die Funktion $gr : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$ ist streng wachsend. Mit Hilfe der Teilmengen

$$\mathcal{M}_k := \{\alpha \in \mathcal{M} \mid gr(\alpha) \leq k\}$$

für ein k aus \mathbb{N}_0 erhält man eine Folge von Unterkomplexen $\{|\mathcal{M}_k|\}_{k \geq 0}$ mit der Eigenschaft $|\mathcal{M}_k| \subseteq |\mathcal{M}_{k+1}|$ und $|\mathcal{M}| = \bigcup_{k \geq 0} |\mathcal{M}_k|$. Wegen $gr(\alpha h) = gr(\alpha)$ für $\alpha \in \mathcal{M}$, $h \in H_n$ (vgl. Lemma 3.9), sind die einzelnen $|\mathcal{M}_k|$ H_n -invariant.

(iii) *Die Unterkomplexe der Filtrierung mod H_n*

Zum Nachweis der Endlichkeit von $|\mathcal{M}_k|$ mod H_n vergleiche man Abschnitt 4.1; die dort angewandte Argumentation ist im übertragenden Sinne auch hier möglich.

(iv) *Homotopieeigenschaften der Inklusion $|\mathcal{M}_k| \subseteq |\mathcal{M}_{k+1}|$*

Da zwei verschiedene Elemente α, β aus \mathcal{M} mit $gr(\alpha) = gr(\beta)$ nicht vergleichbar sind (gr ist streng wachsend), entsteht $|\mathcal{M}_{k+1}|$ aus $|\mathcal{M}_k|$, indem für alle α aus \mathcal{M} mit $gr(\alpha) = k + 1$ ein Kegel über $|\mathcal{M}_{<\alpha}|$ hinzugefügt wird. Gelingt es zu zeigen, daß für α aus \mathcal{M} mit hinreichend großem Grad $gr(\alpha)$ der Simplicialkomplex $|\mathcal{M}_{<\alpha}|$ homotopieäquivalent zu einem Bouquet aus $(n - 1)$ -dimensionalen Sphären ist, so erhält man daher $|\mathcal{M}_{k+1}|$ bis auf Homotopie aus $|\mathcal{M}_k|$ durch Hinzufügen von n -Zellen.

Brown hat nachgewiesen, daß $|\mathcal{M}_{<\alpha}|$ mit $gr(\alpha) = k$ homotopieäquivalent zu folgendem kombinatorischen Simplicialkomplex $\Sigma_{n,k}$ ist:

Für eine Menge W der Ordnung k ist $\{1, \dots, n\} \times W$ die Eckenmenge von $\Sigma_{n,k}$, und $((i_0, w_0), (i_1, w_1), \dots, (i_p, w_p))$ bildet ein p -Simplex von $\Sigma_{n,k}$, falls $i_\nu \neq i_\mu$ und $w_\nu \neq w_\mu$ für alle $\nu \neq \mu$, $\nu, \mu \in \{0, \dots, p\}$ ist.

Das 1-Gerüst von $\Sigma_{n,k}$ ist ein n -gefärbter Graph Γ , wobei $\{i\} \times W$ aus den Ecken der Farbe i besteht. Dabei gilt im Falle $k \geq 2n$ für alle $i = 1, \dots, n$:

Zu je $2(n - 1)$ Ecken außerhalb von $\{i\} \times W$ gibt es in $\{i\} \times W$ mindestens zwei Ecken, die zu jeder dieser $2(n - 1)$ Ecken benachbart sind.

($2(n - 1)$ Ecken beziehen $2(n - 1)$ Elemente $w_1, \dots, w_{2(n-1)}$ aus W mit ein. Wegen $\#W = k \geq 2n$ existieren 2 verschiedene $w, w' \in W - \{w_1, \dots, w_{2(n-1)}\}$. Dann sind

(i, w) und (i, w') die geforderten Ecken). Mit Hilfe von Lemma 4.7 ergibt sich daraus die Homotopieäquivalenz zwischen $\Sigma_{n,k}$ und einem $(n - 1)$ -dimensionalen Sphärenbouquet.

2 Verallgemeinerung der Houghton-Gruppen

Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und für die Mengen $X := \mathbb{N}$ sowie $Y := \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge

$$S := (X \times Y) \times \{1, \dots, n\},$$

welche aus der disjunkten Vereinigung von n Kopien der Menge $X \times Y$ besteht. Die i -te Kopie von $X \times Y$ bezeichnen wir mit Q_i . Die Elemente aus Q_i kann man sich als ganzzahlige Gitterpunkte eines Quadranten in einem kartesischen Koordinatensystem vorstellen (Abbildung 2). S besitzt eine durch die Menge \mathbb{N} induzierte Ordnung, d.h.

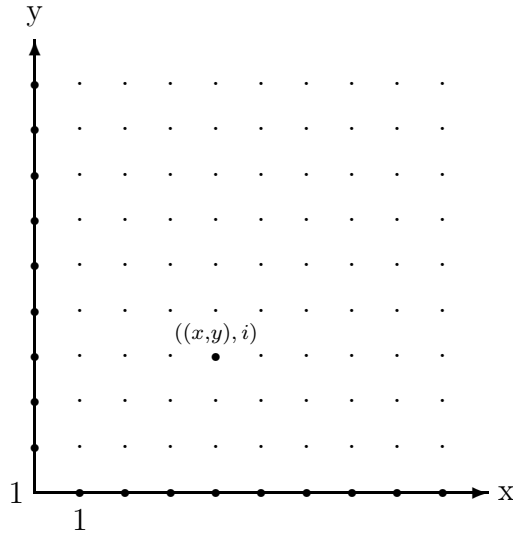


Abbildung 2: Die Menge $Q_i = (X \times Y) \times \{i\}$

es ist $((x, y), i) \leq ((x', y'), i)$, falls $x \leq x'$ und $y \leq y'$.

Es werden im folgenden zwei mögliche Verallgemeinerungen der Houghton-Gruppen beschrieben. In beiden Fällen handelt es sich um gewisse Permutationsgruppen der oben beschriebenen Menge S , wobei analog zu den Houghton-Gruppen jede Permutation ab einer Stelle p_0 (d.h. für alle $((x, y), i) \in S$ mit $(x, y) \geq p_0$) eine Translation ist.

Wir betrachten nun zum einen die Gruppen G_n , bei denen diese Translation in jedem Quadranten Q_i nur in einer Richtung, nämlich in Richtung der Winkelhalbierenden von Q_i , stattfindet (s. Abbildung 3, links), und zum anderen die Gruppen \tilde{G}_n , bei denen als zusätzliche Verallgemeinerung Translationen in jeder Richtung gestattet werden (s. Abbildung 3, rechts).

Neben der Forderung, ab einer gewissen Stelle eine Translation zu sein, müssen die Permutationen aus G_n bzw. \tilde{G}_n noch weitere Bedingungen erfüllen, die jedoch für beide Gruppentypen übereinstimmen und im nächsten Abschnitt erläutert werden.

Die unterbrochenen Linien begrenzen den Bereich, welcher verschoben wird; der fettgedruckte Pfeil gibt die Translation an und das schraffierte Gebiet stellt den zugehörigen Bildbereich dar.

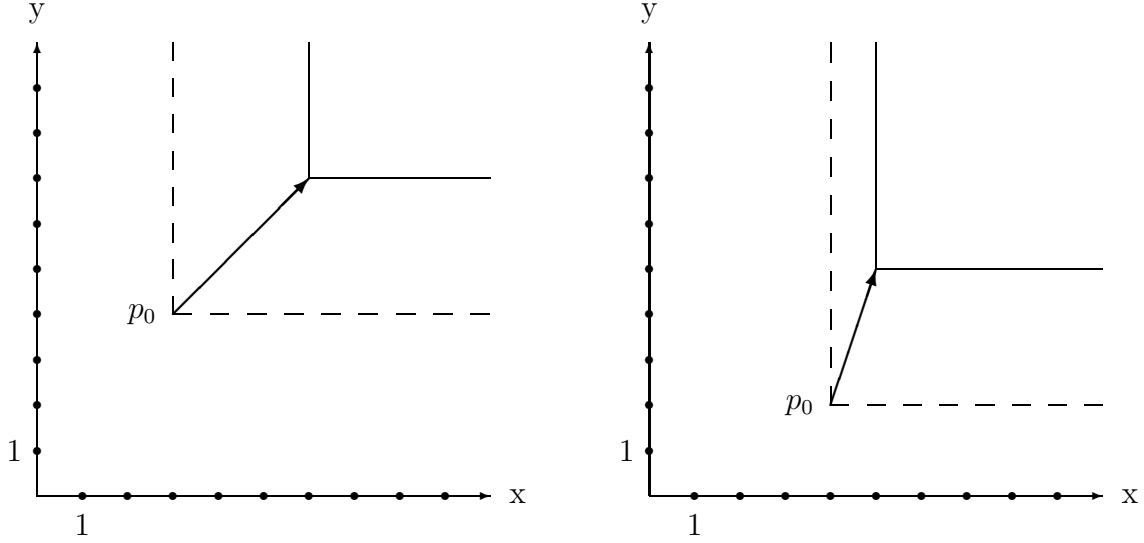


Abbildung 3: Beispiel einer zulässigen Translation bzgl. der Gruppe G (links) und der Gruppe G_n (rechts) innerhalb eines Quadranten Q_i

2.1 Beschreibung der Gruppen G_n und \widetilde{G}_n

Für ein $n \geq 1$ und $S = (X \times Y) \times \{1, \dots, n\}$ sei G_n die Gruppe aller Permutationen g von S , für die ein $p_0 = (x_0, y_0)$ aus $X \times Y$ existiert, sodaß folgende Bedingungen erfüllt sind :

B₁ : Es gibt ein n -Tupel (m_1, \dots, m_n) aus \mathbb{Z}^n , sodaß für alle $(x, y) \geq p_0$ und $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$((x, y), i) g = ((x + m_i, y + m_i), i)$$

B₂ (a): Für alle (x, i) aus $X \times \{1, \dots, n\}$ gibt es ein $q_{(x,i)}$ aus \mathbb{Z} sowie ein $(x, i)' = (x', i')$ aus $X \times \{1, \dots, n\}$, sodaß für alle $y \geq y_0$ gilt:

$$((x, y), i) g = ((x', y + q_{(x,i)}), i')$$

B₂ (b): Für alle (y, i) aus $Y \times \{1, \dots, n\}$ gibt es ein $r_{(y,i)}$ aus \mathbb{Z} sowie ein $(y, i)' = (y', i')$ aus $Y \times \{1, \dots, n\}$, sodaß für alle $x \geq x_0$ gilt:

$$((x, y), i) g = ((x + r_{(y,i)}), i')$$

Bemerkung: Für $(x, i) \in X \times \{1, \dots, n\}$ ist nur das Element $(x, i)'$ eindeutig bestimmt, jedoch nicht die einzelnen Komponenten von $(x, i)'$. Es ist möglich, daß für Elemente $(x_1, i_1), (x_2, i_2)$ mit $i_1 = i_2$ trotzdem $i_1' \neq i_2'$, bzw. für $x_1 = x_2$ $x_1' \neq x_2'$ ist. Dasselbe gilt natürlich auch für die Elemente (y, i) aus $Y \times \{1, \dots, n\}$.

Die Gruppen \tilde{G}_n erhält man, indem B_1 ersetzt wird durch die Bedingung

\tilde{B}_1 : Es gibt ein n -Tupel $(m_1, \dots, m_n) = ((m_{11}, m_{12}), \dots, (m_{n1}, m_{n2}))$ aus $(\mathbb{Z}^2)^n$, sodaß für alle $(x, y) \geq p_0$ und $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$((x, y), i)g = ((x, y) + m_i, i),$$

und $B_2(a)$ bzw. $B_2(b)$ unverändert bleiben.

Erläuterungen. Die Forderung B_1 bzw. \tilde{B}_1 bewirkt, daß g ab p_0 in jedem Quadranten Q_i eine Translation ist (mit Translationsvektor (m_i, m_i) bzw. (m_{i1}, m_{i2}) , zur Veranschaulichung s. Abbildung 3). Notwendigerweise muß dabei $\sum_{i=1}^n m_i = 0$ bzw. $\sum_{i=1}^n (m_{i1}, m_{i2}) = (0, 0)$ gelten.

Durch die Einschränkung B_1 bzw. \tilde{B}_1 alleine werden jedoch den Permutationen g noch zu viele Freiheiten gelassen. Vergleicht man die Situation mit der im Falle der Houghton-Gruppen, so stellt man fest, daß dort nur eine endliche Menge „willkürlich“ abgebildet werden darf. Um ein ähnliches Verhalten hinsichtlich der Permutationen aus G_n bzw. \tilde{G}_n zu erreichen, sind weitere Forderungen nötig, die jedoch mit B_1 bzw. \tilde{B}_1 verträglich sein müssen. Diese Forderungen werden in $B_2(a)$ und $B_2(b)$ festgelegt.

Um $B_2(a)$ geometrisch zu interpretieren, definieren wir für ein $(x, i) \in X \times \{1, \dots, n\}$ und k aus \mathbb{N} die Menge

$$((x, i), \geq k) := \{((x, y), i) \in S \mid y \geq k\}$$

und betrachten die Mengen $((x, i), \geq y_0)$ für alle $(x, i) \in X \times \{1, \dots, n\}$. Die Forderung $B_2(a)$ bedeutet, daß diese Mengen durch g jeweils erst ordnungserhaltend auf eine andere Menge $((x, i)', \geq y_0)$ dieser Form abgebildet und anschließend um den Wert $q_{(x, i)}$ aus \mathbb{Z} verschoben werden (s. Abbildung 4, zur Vereinfachung wurde in diesem Beispiel $i = i'$ gewählt).

Die Permutation g wird also auf der Menge $((x, i), \geq y_0)$ durch Angabe von $(x, i)'$ und $q_{(x, i)}$ festgelegt. Dabei ist zu beachten, daß für $(x, i) \in X \times \{1, \dots, n\}$ mit $x \geq x_0$ die Elemente $(x, i)'$ sowie $q_{(x, i)}$ durch $m_i \in \mathbb{Z}$ im Falle $g \in G_n$ bzw. durch $(m_{i1}, m_{i2}) \in \mathbb{Z}^2$ im Falle $g \in \tilde{G}_n$ bestimmt sind:

Für $g \in G_n$ gilt $(x, i)' = (x', i') = (x + m_i, i)$ und $q_{(x, i)} = m_i$; im Falle $g \in \tilde{G}_n$ ist dagegen $(x', i') = (x + m_{i1}, i)$ und $q_{(x, i)} = m_{i2}$ (s. Abbildung 5).

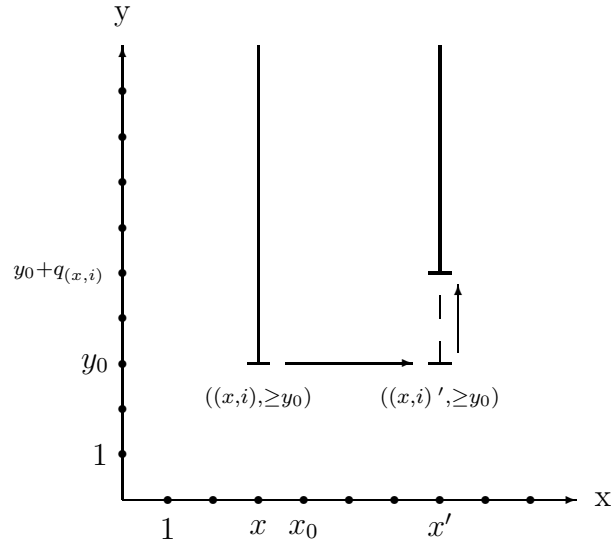


Abbildung 4: Veranschaulichung der Bedingung $B_2(a)$

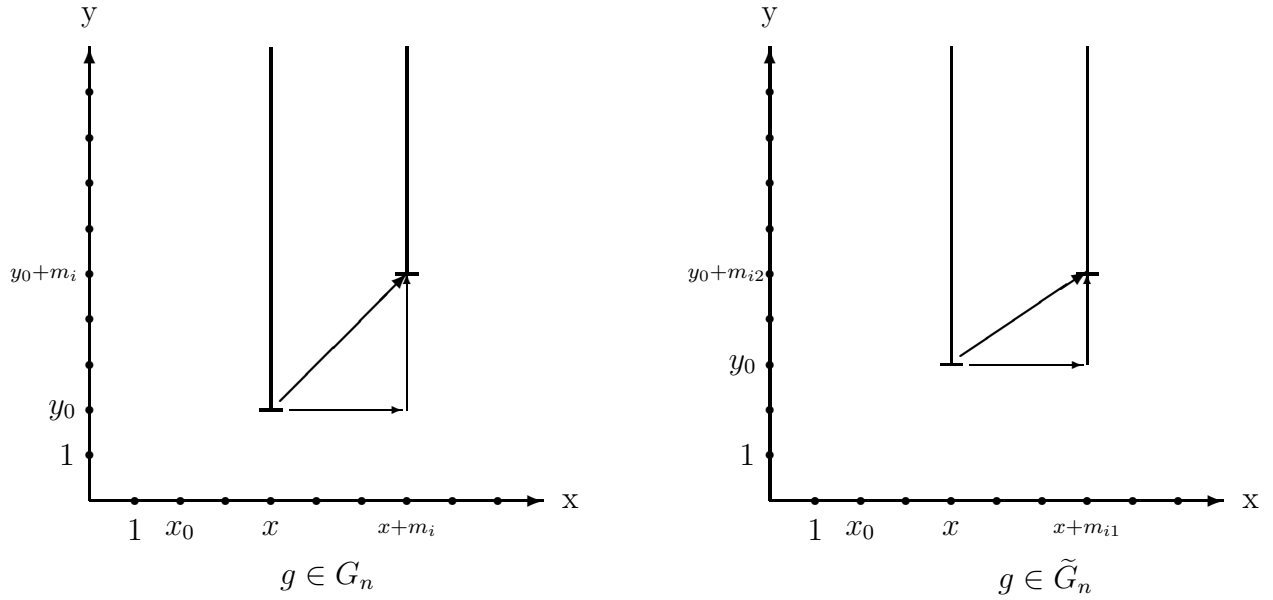


Abbildung 5: Die Bedingung $B_2(a)$ für Elemente (x, i) mit $x \geq x_0$

Die Bedingung B₂(b) läßt sich analog interpretieren mit Hilfe der Mengen

$$((y, i) \geq k) := \{((x, y), i) \in S \mid x \geq k\},$$

wobei $y \in Y \times \{1, \dots, n\}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist. Auf der Menge $((y, i), \geq x_0)$ wird die Permutation g durch $(y, i)' \in Y \times \{1, \dots, n\}$ und $r_{(y, i)} \in \mathbb{Z}$ festgelegt, wobei nun für alle $y \geq y_0$ gilt: $(y, i)' = (y' i') = (y + m_i, i)$ und $r_{(y, i)} = m_i$ falls $g \in G_n$, dagegen $(y' i') = (y + m_{i2}, i)$ und $r_{(y, i)} = m_{i1}$ falls $g \in \tilde{G}_n$.

Bemerkung 2.1: Für $(x_1, i_1), (x_2, i_2) \in X \times \{1, \dots, n\}$ mit $(x_1, i_1) \neq (x_2, i_2)$ ist auch $(x_1, i_1)' \neq (x_2, i_2)'$, d.h. $g \in \tilde{G}_n$ induziert eine Permutation

$$\pi(g) : X \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow X \times \{1, \dots, n\}$$

$$(x, i) \pi(g) := (x, i)'.$$

$\pi(g)$ beschreibt sozusagen die durch g verursachte Permutation der Halbgeraden $((x, i), \geq y_0)$ (für $(x, i) \in X \times \{1, \dots, n\}$) unter Vernachlässigung der Verschiebung (um $q_{(x, i)}$) in Richtung der y-Achse. Dabei gilt für alle $x \geq x_0$: $(x, i)' = (x + m_{i1})$ mit $m_{i1} \in \mathbb{Z}$ (vgl. Abschnitt 2.1, Erläuterungen). D.h. $\pi(g)$ ist ein Element der Houghton-Gruppe H_n bezüglich der zugrundeliegenden Menge $X \times \{1, \dots, n\}$. Analog erhält man zu g eine Permutation $\sigma(g)$ der Menge $Y \times \{1, \dots, n\}$

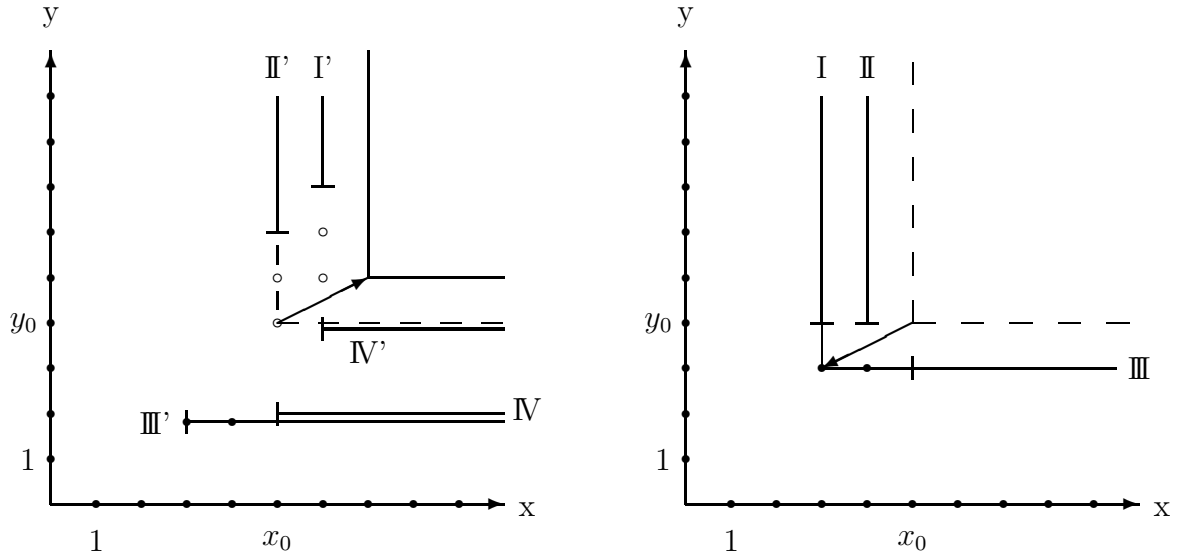
$$\sigma(g) : Y \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow Y \times \{1, \dots, n\}$$

$$(y, i) \sigma(g) := (y, i)',$$

wobei $(y, i)'$ aus Bedingung B₂(b) stammt und für $y \geq y_0$ die Beziehung $(y, i)' = (y + m_{i2}, i)$ mit $(m_{12}, \dots, m_{n2}) \in \mathbb{Z}^n$ besteht. $\sigma(g)$ ist also ebenfalls aus H_n (bezüglich zugrundeliegender Menge $Y \times \{1, \dots, n\}$).

Die Zuordnungen $g \mapsto \pi(g)$ bzw. $g \mapsto \sigma(g)$, die wir im weiteren mit π bzw. σ bezeichnen, sind daher jeweils Homomorphismen von der Gruppe \tilde{G}_n nach H_n . Dabei ist schon die Einschränkung der Abbildung π bzw. σ auf die Gruppe G_n surjektiv, d.h. die Houghton-Gruppe H_n taucht als Faktorgruppe von G_n und \tilde{G}_n auf.

Abbildung 6 zeigt ein Beispiel für eine Permutation g aus \tilde{G}_2 . Daran wird auch das prinzipielle Verhalten der Permutationen aus G_n deutlich, sodaß wir auf ein zusätzliches Beispiel für ein $g \in G_n$ verzichten.



$$p_0 = (5, 4), m_1 = (2, 1), m_2 = (-2, -1), q_{(3,2)} = 3, q_{(4,2)} = 2, r_{(2,1)} = -1, r_{(3,2)} = -2$$

Alle Elemente $((x, y), i)$ mit $(x, y) \geq p_0 = (x_0, y_0)$ werden gemäß der Pfeilangabe verschoben. Die Mengen der Form $((x, i), \geq 4)$ mit $x < 5$ bzw. $((y, i), \geq 5)$ mit $y < 4$, welche unter g nicht identisch abgebildet werden, sind fettgedruckt und mit den Römischen Ziffern I, II, III, und IV gekennzeichnet. Die zugehörigen Bildmengen unter g besitzen jeweils die Bezeichnung I', II', III' und IV'. Die ausgefüllten Kreise stellen die Elemente dar, denen noch ein Bildelement zugewiesen werden muß, dagegen markieren die leeren Kreise die Stellen aus s , die als Bildelemente in Frage kommen.

Abbildung 6: Beispiel einer Permutation g aus \tilde{G}_2

2.2 G_n als Normalteiler von \tilde{G}_n

Mit Hilfe des n -Tupels $((m_{11}, m_{12}), \dots, (m_{n1}, m_{n2}))$ aus $(\mathbb{Z}^2)^n$, das nach Bedingung \tilde{B}_1 zu jedem $g \in \tilde{G}_n$ existiert, definieren wir den Homomorphismus

$$\phi : \tilde{G}_n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$$

$$\phi(g) := (m_{11} - m_{12}, \dots, m_{n1} - m_{n2}).$$

Wegen $\sum_{i=1}^n (m_{i1}, m_{i2}) = (0, 0)$, also auch $\sum_{i=1}^n (m_{i1} - m_{i2}) = 0$, ist das Bild von ϕ isomorph zur Gruppe \mathbb{Z}^{n-1} . Der Kern von ϕ besteht aus den Permutationen $g \in \tilde{G}_n$ mit $m_{i1} = m_{i2}$ für alle $i = 1, \dots, n$. Also ist $\text{Ker } \phi$ gerade die Gruppe G_n . Wir erhalten somit eine exakte Sequenz von Gruppen

$$0 \longrightarrow G_n \longrightarrow \tilde{G}_n \longrightarrow \mathbb{Z}^{n-1} \longrightarrow 0.$$

Da \mathbb{Z}^{n-1} für alle $n \geq 1$ vom Typ $(\text{FP})_\infty$ ist (vgl. [Br2], Kapitel 8, Abschnitt 6), übertragen sich nach Lemma 1.5 von denen in dieser Arbeit nachgewiesenen Endlichkeitseigenschaften der Gruppe G_n (vom Typ $(\text{FP})_{n-1}$, nicht vom Typ $(\text{FP})_n$ und für $n \geq 3$ endlich präsentiert) die positiven Teile auf \tilde{G}_n .

2.3 Die Houghton-Gruppe als Untergruppe von G_n

Die Houghtongruppe taucht in mehrfacher Form als Untergruppe von G_n (und auch von \tilde{G}_n) auf. Es gibt sogar zu beliebigem m aus \mathbb{N} eine Einbettung $H_m \hookrightarrow G_n$. Wir stellen in diesem Abschnitt spezielle Untergruppen U von G_n vor mit $H_m \hookrightarrow U$ für ein $m \in \mathbb{N}$, und deren Faktorgruppe nach H_m endlich ist. Solche Untergruppen spielen im weiteren Verlauf der Arbeit eine wichtige Rolle, da sie als Stabilisatoren bezüglich der G_n -Operation auf dem im 3. Abschnitt konstruierten Simplicialkomplex auftreten.

Wir betrachten zu zwei positiven ganzen Zahlen k_1 und k_2 mit $k_1 + k_2 \geq 1$ k_1 viele verschiedene Elemente $(x_1, i_1), (x_2, i_2), \dots, (x_{k_1}, i_{k_1})$ aus $X \times \{1, \dots, n\}$ sowie k_2 viele verschiedene Elemente $(y_1, j_1), (y_2, j_2), \dots, (y_{k_2}, j_{k_2})$ aus $Y \times \{1, \dots, n\}$, wählen m_1, \dots, m_{k_1} sowie l_1, \dots, l_{k_2} aus \mathbb{N} und bilden die Menge

$$A := ((x_1, i_1), \geq m_1) \cup \dots \cup ((x_{k_1}, i_{k_1}), \geq m_{k_1}) \\ \cup ((y_1, j_1), \geq l_1) \cup \dots \cup ((y_{k_2}, j_{k_2}), \geq l_{k_2}).$$

(Zur Definition der Mengen $((x, i), \geq m)$ bzw. $((y, j), \geq l)$ mit m und l aus \mathbb{N} vergleiche man Abschnitt 2.1). Dabei seien die Mengen $((x_\nu, i_\nu), \geq m_\nu)$ für $\nu = 1, \dots, k_1$ und $((y_\mu, j_\mu), \geq l_\mu)$ für $\mu = 1, \dots, k_2$ paarweise disjunkt zueinander (Abbildung 7 zeigt ein Beispiel für A). Wir können also über die Zuordnung

$$f : A \longrightarrow \mathbb{N} \times \{1, \dots, k_1 + k_2\}$$

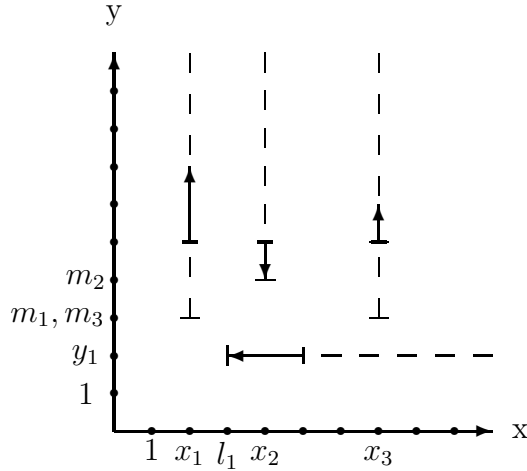
$$\begin{aligned} f((x_\nu, i_\nu), y - 1 + m_\nu) &= (y, \nu) && \text{für alle } y \in \mathbb{N}, \nu = 1, \dots, k_1 \\ f((y_\mu, j_\mu), x - 1 + l_\mu) &= (x, k_1 + \mu) && \text{für alle } x \in \mathbb{N}, \mu = 1, \dots, k_2 \end{aligned}$$

die Menge A mit $\mathbb{N} \times \{1, \dots, k_1 + k_2\}$ identifizieren. Es sei nun $U_{k_1+k_2}$ die Untergruppe von G_n , welche sämtliche Elemente aus G_n enthält, die außerhalb von A die Identität sind. Dies überträgt sich insofern auf die in Bemerkung 2.1 erklärten Abbildungen π bzw. σ , daß für ein g aus $U_{k_1+k_2}$ das Element $\pi(g)$ bzw. $\sigma(g)$ außerhalb der endlichen Menge $\bigcup_{\nu=1}^{k_1} (x_\nu, i_\nu)$ bzw. $\bigcup_{\mu=1}^{k_2} (y_\mu, j_\mu)$ ebenfalls die Identität ist. ($\pi(g)$ bzw. $\sigma(g)$) beschreibt die durch g induzierte Permutation auf der Menge $X \times \{1, \dots, n\}$ bzw. $Y \times \{1, \dots, n\}$. $\pi(g)$ bzw. $\sigma(g)$ kann daher als Element von Σ_{k_1} bzw. Σ_{k_2} (mit Σ_k bezeichnen wir die Permutationsgruppe der Menge $\{1, \dots, k\}$) aufgefaßt werden, und wir erhalten einen Homomorphismus

$$\Phi : U_{k_1+k_2} \longrightarrow \Sigma_{k_1} \times \Sigma_{k_2}$$

$$\Phi(g) := (\pi(g), \sigma(g)).$$

Im Kern von Φ liegen diejenigen Permutationen g aus G_n , die nur noch Elemente innerhalb A permutieren und dabei jede der Halbgeraden $((x_\nu, i_\nu), \geq m_\nu)$ und



Zur Vereinfachung der Darstellung nehmen wir an, daß die Menge A sich innerhalb nur eines Quadranten Q_i befindet. Sie wird in der Abbildung durch die gestrichelten Linien gekennzeichnet. Die Pfeile stellen die durch q_1, q_2, q_3 und r_1 gegebene Translation dar.

Abbildung 7: Beispiel für ein $g \in \text{Ker } \Phi$

$((y_\mu, j_\mu), \geq l_\mu)$, aus denen sich A zusammensetzt, ab einer Stelle in sich verschieben (vgl. Abbildung 7). Anschaulich ist klar, daß $\text{Ker } \Phi$ isomorph zur Houghtongruppe $H_{k_1+k_2}$ ist. Formal erhält man den Isomorphismus durch die Zuordnung $g \longmapsto f^{-1}gf$.

Da die Faktorgruppe von $U_{k_1+k_2}$ nach der Untergruppe $\text{Ker } \Phi$ endlich ist, erhalten wir mit Hilfe von Lemma 1.4 folgendes Resultat:

Lemma 2.1 Mit $m := k_1 + k_2$ ist die Gruppe $U_{k_1+k_2}$ vom Typ $(FP)_{m-1}$, jedoch nicht vom Typ $(FP)_m$. Für $m \geq 3$ ist sie zusätzlich endlich präsentiert.

Bemerkung 2.2 Die hier vorgestellten Gruppen $U_{k_1+k_2}$ treten in späteren Situationen in einer etwas veränderten Form auf. Und zwar vergrößert sich dort die auf der vorigen Seite beschriebene Menge A um eine endliche, zu A disjunkte Menge $P = \{p_1, \dots, p_r\}$ (s. Abbildung 8). $U'_{k_1+k_2}$ ist dann entsprechend die Gruppe derjenigen Elemente aus

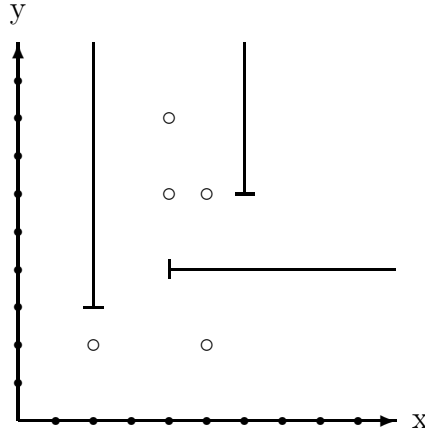


Abbildung 8: Beispiel der Menge $A \cup P$ in einem Quadranten Q_i

G_n , die außerhalb von $A \cup P$ die Identität sind. Durch eine leichte Modifikation der Funktion f kann man die Aussage von Lemma 2.1 auf die Gruppen $U'_{k_1+k_2}$ übertragen. Wir betrachten

$$f' : A \cup P \longrightarrow \mathbb{N} \times \{1, \dots, k_1 + k_2\}$$

$$\begin{aligned} f'(p_j) &:= (j, 1) \quad \text{für } j = 1, \dots, r \\ f'((x_1, i_1), m_1 + y - 1) &:= (r + y, 1) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{N} \\ f'((x_\nu, i_\nu), m_\nu + y - 1) &:= (y, \nu) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{N}, \nu = 2, \dots, k_1 \\ f'((y_\mu, j_\mu), l_\mu + x - 1) &:= (x, k_1 + \mu) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{N}, \mu = 1, \dots, k_2. \end{aligned}$$

Die endlich vielen Elemente p_1, \dots, p_r aus P werden also lediglich der Menge $((x_1, i_1), \geq m_1)$ vorgeschaltet. Dies verändert nichts an den für die Gruppen $U_{k_1+k_2}$ geführten Überlegungen, d.h. Lemma 2.1 gilt ebenfalls für die Gruppen $U'_{k_1+k_2}$.

3 Konstruktion eines G_n -Komplexes

Ziel dieses Abschnittes ist es, einen G_n -Komplex zu konstruieren, der die Voraussetzungen von Korollar 1.3 erfüllt. Zur Erinnerung: Wir benötigen einen CW -Komplex, auf dem G_n in geeigneter Weise (Permutation der Zellen) operiert, sodaß der Stabilisator jeder Zelle vom Typ $(FP)_n$ und für $n \geq 3$ zusätzlich endlich präsentiert ist. Darüberhinaus muß die Zusammenziehbarkeit dieses Komplexes gewährleistet sein.

Die einzelnen Schritte, die bei der Konstruktion eines solchen G_n -Komplexes durchlaufen werden, decken sich im wesentlichen mit denen, die im Falle der Houghton-Gruppen ausgeführt wurden. Auch hier ist der Ausgangspunkt das Monoid aller injektiven Abbildungen von S nach S , die die Bedingungen B_1 und B_2 erfüllen. Mit Hilfe eines Untermonoides wird auf der dem Monoid zugrundeliegenden Menge eine Ordnung erklärt, wodurch ein Simplicialkomplex entsteht, auf dem G_n simplicial operiert (vgl. Abschnitt 1.3, Schritt 1).

Probleme ergeben sich dabei hinsichtlich der Stabilisatoren; es zeigt sich, daß nicht alle die oben genannten Eigenschaften besitzen. Die Situation läßt sich jedoch retten, indem letztendlich nur ein gewisser Unterkomplex des erhaltenen Simplicialkomplexes zur Fortführung des Beweises benutzt wird.

3.1 Die partiell geordnete Menge \mathcal{M}

Es sei M das Monoid aller injektiven Abbildungen von S nach S , die die in Abschnitt 2.1 festgelegten Bedingungen B_1 und B_2 erfüllen. Für ein α aus M , das die Elemente im i -ten Quadranten ab der Stelle p_0 um m_i verschiebt, ist $\sum_{i=1}^n m_i \geq 0$.

Ein Element t aus M heißt *Translation*, falls es ein n -Tupel (m_1, \dots, m_n) aus \mathbb{Z}^n gibt, sodaß

$$((x, y), i) t = ((x + m_i, y + m_i), i) \quad \text{für alle } (x, y) \in X \times Y$$

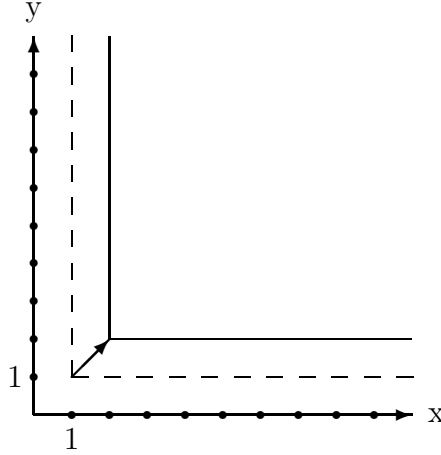
erfüllt ist. Dabei muß notwendigerweise $m_i \geq 0$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gelten.

Mit T bezeichnen wir das kommutative Untermonoid von M , welches aus allen Translationen besteht. T wird erzeugt von den Elementen t_1, \dots, t_n , wobei

$$\begin{aligned} ((x, y), j) t_i &= ((x, y), j) && \text{für alle } (x, y) \in (X \times Y), \quad j \in \{1, \dots, n\} - \{i\} \\ ((x, y), i) t_i &= ((x + 1, y + 1), i) && \text{für alle } (x, y) \in (X \times Y) \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

t_i ist also außerhalb des Quadranten Q_i die Identität, und innerhalb von Q_i verschiebt es sämtliche Elemente jeweils um 1 in Richtung der x- und in Richtung der y-Achse (s. Abbildung 9). Mit Hilfe von T wird nun eine Ordnung auf M erklärt.

Definition: Für α und β aus M ist $\alpha \leq \beta$, falls es ein t aus T gibt mit $t\alpha = \beta$.



Die gestrichelten Linien kennzeichnen den Bereich, welcher verschoben wird; der Pfeil gibt die Translation an, und das schraffierte Gebiet kennzeichnet den zugehörigen Bildbereich.

Abbildung 9: Die Translation t_i in Q_i

Reflexivität und Transitivität dieser Relation sind unmittelbar ersichtlich. Gilt für α, β aus M sowohl $\alpha \leq \beta$ als auch $\beta \leq \alpha$, also $t\alpha = \beta$ und $t'\beta = \alpha$ mit $t, t' \in T$, so folgt $tt'\beta = \beta$. Daraus ergibt sich wegen der Injektivität von β : $tt' = \text{id}_S$. Dies ist nur möglich, wenn $t = t' = \text{id}_S$ (bei Translationen ist jedes $m_i \geq 0$), also $\alpha = \beta$.

Mit \mathcal{M} bezeichnen wir im folgenden die dem Monoid zugrundeliegende Menge, ausgestattet mit dieser Ordnung. T besitzt nun eine besondere Eigenschaft, die die Gerichtetheit von \mathcal{M} gewährleistet.

Lemma 3.1 *Die Menge T ist eine cofinale Teilmenge von \mathcal{M} , d.h. für alle α aus \mathcal{M} existiert ein $t \in T$ mit $\alpha \leq t$.*

BEWEIS: Ein α aus \mathcal{M} erfüllt B_1 , d.h. es gibt ein $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$ und ein n -Tupel $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ mit

$$((x, y), i)\alpha = ((x, y) + (m_i, m_i), i) \quad \text{für alle } (x, y) \geq p_0$$

und $i = 1, \dots, n$. Also entspricht für alle $((x, y), i) \in S$ mit $(x, y) \geq p_0$ die Abbildung α der Translation $t_1^{m_1} t_2^{m_2} \cdot \dots \cdot t_n^{m_n}$. Wir konstruieren nun eine Translation t_α , die die Elemente jedes Quadranten soweit verschiebt, daß die Bildelemente $\geq p_0$ sind. Die Zusammensetzung $t_\alpha \alpha$ ist dann die gesuchte Translation t .

Sei $l := \max\{x_0, y_0\}$. Wir definieren $t_\alpha := t_1^{l-1} \cdot \dots \cdot t_n^{l-1}$ (s. Abbildung 10).

Die gestrichelte Linie begrenzt den Bereich, in dem α eine Translation ist (die durch den schmalen Pfeil angegeben wird).

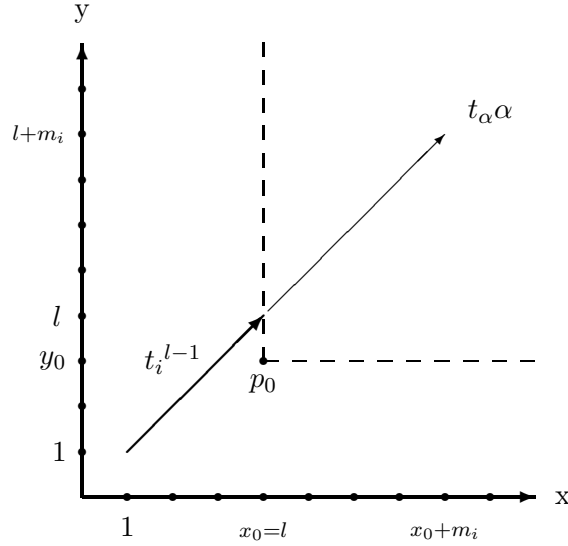


Abbildung 10: Konstruktion von t_α in Q_i mit $t_\alpha \alpha \in T$

t_α gehört zu T und es gilt für alle $i = 1, \dots, n$ und $(x, y) \in X \times Y$:

$$\begin{aligned} ((x, y), i) t_\alpha &= ((x, y), i) t_i^{l-1} \\ &= ((x + l - 1, y + l - 1), i) \\ &\geq (l, l) \\ &\geq (x_0, y_0) = p_0, \end{aligned}$$

also ist $t_\alpha \alpha = t_\alpha(t_1^{m_1} \cdot \dots \cdot t_n^{m_n}) \in T$. □

Korollar 3.2 \mathcal{M} ist eine gerichtete Menge. (D.h. für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{M}$ existiert ein $\gamma \in \mathcal{M}$ mit $\alpha \leq \gamma$ und $\beta \leq \gamma$).

BEWEIS: Für α, β aus \mathcal{M} existieren nach dem letzten Lemma Elemente t_1 und t_2 aus T mit $\alpha \leq t_1$, $\beta \leq t_2$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha &\leq t_1 \leq t_2 t_1 \quad \text{und} \\ \beta &\leq t_2 \leq t_1 t_2, \end{aligned}$$

wobei wegen der Kommutativität von T $t_2 t_1 = t_1 t_2$ ist. □

3.2 Untersuchung der Operation von G_n auf $|\mathcal{M}|$

Wie bei den Houghton-Gruppen (vgl. Abschnitt 1.3, Schritt 1, (ii)) liefert die gerichtete Menge \mathcal{M} einen zusammenziehbaren G_n -Komplex $|\mathcal{M}|$, wobei die Operation von G_n auf $|\mathcal{M}|$ durch

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_p)g = (\alpha_0g, \dots, \alpha_pg)$$

für $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in |\mathcal{M}|$ und $g \in G_n$ gegeben ist. Hinsichtlich der Stabilisatoren dieser Operation von G_n ist die Situation jedoch nicht so günstig wie im Falle der Houghton-Gruppen, wo diese alle endlich sind. Wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden, treten hier etliche Stabilisatoren auf, die nur vom Typ FP_m für ein $m < n$ sind.

Allerdings bilden – wie in 3.3 gezeigt wird – diejenigen Simplizes aus $|\mathcal{M}|$, deren Stabilisatoren die geforderten Endlichkeitseigenschaften aus Korollar 1.3 erfüllen, einen G_n -invarianten und zusammenziehbaren Unterkomplex von $|\mathcal{M}|$, sodaß es möglich ist, mit diesem den Beweis fortzusetzen.

3.2.1 Eigenschaften der Stabilisatoren

Bevor wir beginnen, uns mit dem Stabilisator eines Simplexes aus $|\mathcal{M}|$ auseinanderzusetzen, zeigen wir, daß es ausreicht, die Untersuchung auf Elemente aus \mathcal{M} zu beschränken.

Lemma 3.3 *Für ein p -Simplex $(\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ aus $|\mathcal{M}|$ ist*

$$\text{Stab}_{G_n}((\alpha_0, \dots, \alpha_p)) = \text{Stab}_{G_n}(\alpha_0).$$

BEWEIS: Aus $(\alpha_0g, \dots, \alpha_pg) = (\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ folgt $\alpha_0g = \alpha_0$, also $\text{Stab}_{G_n}((\alpha_0, \dots, \alpha_p)) \subseteq \text{Stab}_{G_n}(\alpha_0)$. Wegen $\alpha_i > \alpha_0$, also $d_i\alpha_0 = \alpha_i$ mit d_i aus T für alle $i = 1, \dots, p$, ist mit $\alpha_0g = \alpha_0$ auch $\alpha_ig = (d_i\alpha_0)g = d_i(\alpha_0g) = d_i\alpha_0 = \alpha_i$, woraus sich die umgekehrte Inklusion ergibt. \square

Sei nun α aus \mathcal{M} . Dann besteht $\text{Stab}_{G_n}(\alpha)$ genau aus denjenigen $g \in G_n$, deren Einschränkung auf die Menge $S\alpha$ die Identität ist. Der Stabilisator von α wird also durch die Menge $S - S\alpha$ charakterisiert. Aus diesem Grund ist es notwendig, Aufschluß über die Gestalt der Menge $S - S\alpha$ zu gewinnen. Mit den in Abschnitt 2.1 definierten Mengen

$$\begin{aligned} ((x, i), \geq m) &= \{((x, y), i) \in S \mid y \geq m\} \quad \text{sowie} \\ ((y, j), \geq l) &= \{((x, y), j) \in S \mid x \geq l\} \end{aligned}$$

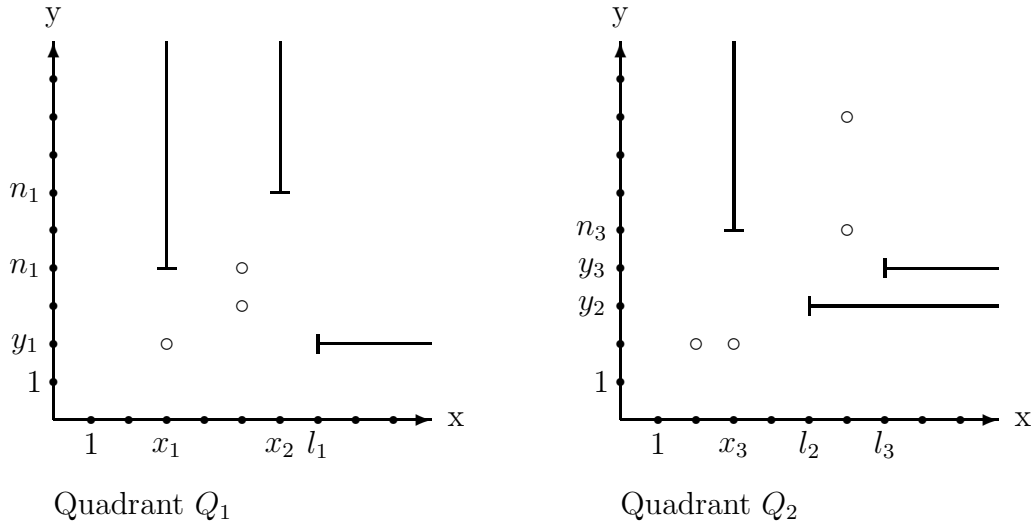
für (x, i) aus $X \times \{1, \dots, n\}$, (y, j) aus $Y \times \{1, \dots, n\}$ und m, l aus \mathbb{N} erhalten wir folgende Aussage.

Lemma 3.4 Sei α aus \mathcal{M} . Dann gibt es jeweils k ($k \geq 0$) viele paarweise verschiedene Elemente $(x_1, i_1), \dots, (x_k, i_k)$ aus $X \times \{1, \dots, n\}$ bzw. $(y_1, j_1), \dots, (y_k, j_k)$ aus $Y \times \{1, \dots, n\}$, sowie natürliche Zahlen n_1, \dots, n_k und l_1, \dots, l_k , sodaß $S - S\alpha$ die disjunkte Vereinigung der Mengen

$$\begin{aligned} ((x_\nu, i_\nu), \geq n_\nu) & \quad 1 \leq \nu \leq k, \\ ((y_\mu, j_\mu), \geq l_\mu) & \quad 1 \leq \mu \leq k \quad \text{und} \\ P \end{aligned}$$

ist, wobei P eine endliche Teilmenge von S ist. Dabei sind die Elemente $(x_1, i_1), \dots, (x_k, i_k)$ bzw. $(y_1, j_1), \dots, (y_k, j_k)$ im Falle $k > 0$ eindeutig bestimmt.

Abbildung 11 zeigt ein Beispiel einer solchen Menge für $n = 2$, also $S = Q_1 \cup Q_2$.



Die fettgedruckten Linien entsprechen den Mengen $((x_1, 1), \geq n_1), ((x_2, 1), \geq n_2), ((x_3, 2), \geq n_3)$ und $((y_1, 1), \geq l_1), ((y_2, 2), \geq l_2), ((y_3, 2), \geq l_3)$ dar. Die Kreise stellen die Menge P dar.

Abbildung 11: Die Menge $S - S\alpha$ für ein α aus \mathcal{M}

BEWEIS: Im folgenden bezeichnen wir zu einer Teilmenge A von S und einem (x, y) aus $X \times Y$ mit $A_{<(x,y)}$ die Menge aller Elemente $((x', y'), i)$ aus A mit $(x', y') < (x, y)$. Analog definiert man die Mengen $A_{\leq(x,y)}$, $A_{>(x,y)}$ und $A_{\geq(x,y)}$.

Für ein α aus \mathcal{M} gibt es ein $p_0 = (x_0, y_0) \in (X \times Y)$ und ein n -Tupel $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, sodaß $((x, y), i)\alpha = ((x, y) + (m_i, m_i), i)$ für alle $(x, y) \geq p_0$ und $i = 1, \dots, n$ ist (Bedingung B₁). Es sei nun $x_i := x_0 + m_i$ und $y_i := y_0 + m_i$, $i = 1, \dots, n$. Dann ist (s. Abbildung 12)

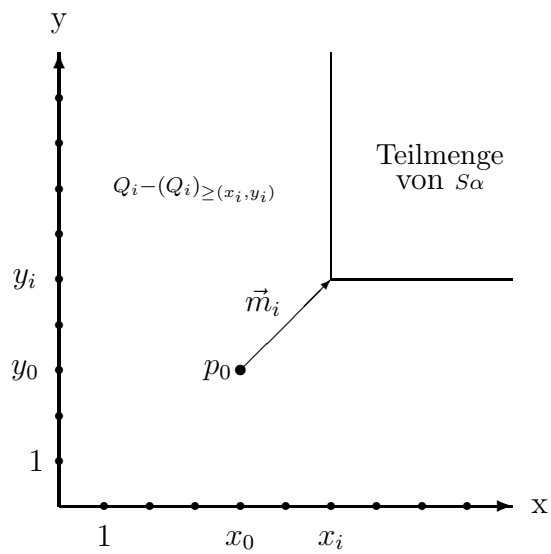


Abbildung 12: Das schraffierte Gebiet entspricht der Menge $(Q_i)_{\geq (x_i, y_i)}$

$$(Q_i)_{\geq(x_i, y_i)} = (Q_i)_{\geq p_0} \alpha \subseteq S \alpha \quad \text{bzw.} \quad \bigcup_{i=1}^n (Q_i)_{\geq(x_i, y_i)} \subseteq S \alpha, \text{ d.h.}$$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} S - S\alpha &= \left(\bigcup_{i=1}^n Q_i \right) - S\alpha \\ &\subseteq \left(\bigcup_{i=1}^n Q_i \right) - \left(\bigcup_{i=1}^n (Q_i)_{\geq(x_i, y_i)} \right) = \bigcup_{i=1}^n (Q_i - (Q_i)_{\geq(x_i, y_i)}). \end{aligned}$$

Die Menge $Q_i - (Q_i)_{\geq(x_i, y_i)}$ läßt sich wiederum in folgende zueinander disjunkte Mengen aufteilen (s. Abbildung 13):

$$(3.4) \quad \begin{aligned} &((\xi, i), \geq y_i) && \text{mit } \xi \in X, 1 \leq \xi < x_i, \\ &((\eta, i), \geq x_i) && \text{mit } \eta \in Y, 1 \leq \eta < y_i \quad \text{und} \\ &(Q_i)_{<(x_i, y_i)} && . \end{aligned}$$

Die fettgedruckten vertikalen Linien repräsentieren die Mengen der Form $((\xi, i), \geq y_i)$ für $1 \leq \xi < x_i$. Entsprechend stellen die horizontalen fettgedruckten Linien die Mengen $((\eta, i), \geq x_i)$, $1 \leq \eta < y_i$ dar.

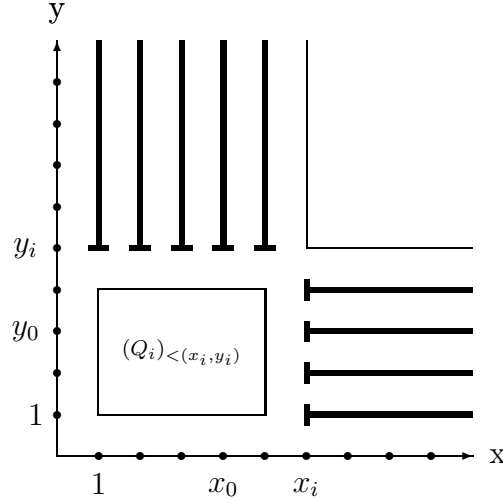


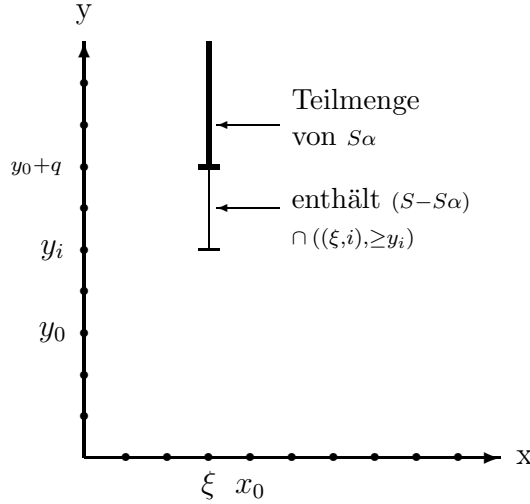
Abbildung 13: Aufteilung der Menge $Q_i - (Q_i)_{\geq(x_i, y_i)}$

Wegen (3.1) befindet sich die Menge $S - S\alpha$ in den Teilmengen $Q_i - (Q_i)_{\geq(x_i, y_i)}$ von S . Es genügt also, den Schnitt von $S - S\alpha$ mit den einzelnen Mengen aus (3.2) zu untersuchen; daraus setzt sich dann die gesamte Menge $S - S\alpha$ zusammen.

Wir betrachten zuerst die Mengen der Form $((\xi, i), \geq y_i)$, $1 \leq \xi < x_i$. Nach B₂(a) hat für alle $(x, j) \in X \times \{1, \dots, n\}$ die Bildmenge von $((x, j), \geq y_0)$ unter α die Gestalt $((x, j)', \geq y_0 + q)$ für ein $q \in \mathbb{Z}$. Es gibt nun 2 Fälle:

1. Es existiert ein $(x, j) \in X \times \{1, \dots, n\}$ mit $(x, j)' = (\xi, i)$
2. Für alle $(x, j) \in X \times \{1, \dots, n\}$ ist $(x, j)' \neq (\xi, i)$.

Im 1. Fall ist $((\xi, i), \geq y_0 + q) = ((x, j), \geq y_0) \alpha \subseteq S\alpha$, d.h. der Anteil von $S - S\alpha$ in $((\xi, i), \geq y_i)$ muß aus der Menge $((\xi, i), \geq y_i) - ((\xi, i), \geq y_0 + q)$ stammen (s. Abbildung 14). Somit ist der Schnitt $((\xi, i), \geq y_i) \cap (S - S\alpha)$ endlich (bzw. für $y_0 + q \leq y_i$ leer).



Die fette Linie entspricht der Menge $((\xi, i), \geq y_0 + q)$, die andere Linie der Menge $((\xi, i), \geq y_i)$.

Abbildung 14: 1. Fall

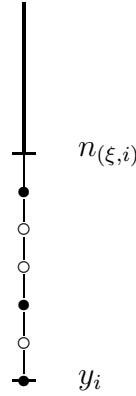
Im 2. Fall wird *kein* Element $((x, y), j)$ aus S mit $y \geq y_0$ unter α auf $((\xi, i), \geq y_i)$ abgebildet. Bleibt noch die Menge der Elemente $((x, y), j)$ mit $y < y_0$, die möglicherweise Bildelemente in $((\xi, i), \geq y_i)$ besitzt.

Diese Menge setzt sich aus den einzelnen $((\eta, j), \geq x_0)$ mit $1 \leq \eta < y_0$, $j = 1, \dots, n$ sowie der Menge $S_{<(x_0, y_0)}$ zusammen. Da im Bildbereich dieser $((\eta, j), \geq x_0)$ nur y -Werte $< y_i$ vorkommen können (sonst wäre der Schnitt mit $(Q_i)_{\geq(x_i, y_i)}$ nicht leer), wird kein Element von $((\eta, j), \geq x_0)$ nach $((\xi, i), \geq y_i)$ abgebildet. Es bleiben daher höchstens die Elemente aus der endlichen Menge $S_{<(x_0, y_0)}$ mit möglichen Bildelementen in $((\xi, i), \geq x_0)$, d.h. $((\xi, i), \geq y_0) \cap S\alpha$ ist endlich.

Es existiert daher ein $n_{(\xi, i)} \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} ((\xi, i), \geq y_i) \cap (S - S\alpha) &= ((\xi, i), \geq y_i) - ((\xi, i), \geq y_i) \cap S\alpha \\ &= ((\xi, i), \geq n_{(\xi, i)}) \cup E_{(\xi, i)}, \end{aligned}$$

wobei $E_{(\xi, i)}$ eine endliche Menge disjunkt zu $((\xi, i), \geq n_{(\xi, i)})$ ist (s. Abbildung 15).



Nebstehende Abbildung zeigt die Menge $((\xi, i), \geq y_i)$. Die ausgefüllten Kreise stellen die endliche Menge $((\xi, i), \geq y_i) \cap S\alpha$ dar. Die unausgefüllten Kreise entsprechen der Menge $E_{(\xi, i)}$, und die fettgedruckte Linie repräsentiert die Menge $((\xi, i), \geq n_{(\xi, i)})$.

Abbildung 15: 2.Fall

Analog zeigt man, daß für die Mengen $((\eta, i), \geq x_i)$ mit $1 \leq \eta < y_i$, $i = 1, \dots, n$ einer der beiden folgenden Fälle zutrifft:

1. $((\eta, i), \geq x_i) \cap (S - S\alpha)$ ist endlich oder
2. $((\eta, i), \geq x_i) = ((\eta, i), \geq l_{(\eta, i)}) \cup E'_{(\eta, i)}$

mit $l_{(\eta, i)} \in \mathbb{N}$, $E'_{(\eta, i)}$ endliche und zu $((\eta, i), \geq l_{(\eta, i)})$ disjunkte Menge. Dabei tritt der 1. Fall ein, wenn es ein $(y, j) \in Y \times \{1, \dots, n\}$ gibt mit der Eigenschaft $((y, j), \geq x_0)\alpha = ((\eta, i), \geq x_0 + r)$, ansonsten der 2.Fall.

Vereinigt man nun sämtliche endliche Teilmengen von S , die zu den 1. Fällen gehören, sowie sämtliche Mengen $E_{(\xi, i)}$ bzw. $E'_{(\eta, i)}$, die in den 2. Fällen auftreten, zu der Menge P , so erhält man die gewünschte Darstellung der Menge $S - S\alpha$ durch

$$(3.5) \quad \begin{array}{ll} ((\xi, i), \geq n_{(\xi, i)}) & (\xi, i) \text{ gehört zum 1. Fall,} \\ ((\eta, i), \geq l_{(\eta, i)}) & (\eta, i) \text{ gehört zum 1. Fall und} \\ & P. \end{array}$$

Bleibt zu überlegen, wie groß die Anzahl der (ξ, i) (bzw. (η, i)) ist, die zum 1. Fall gehören. Wir betrachten dazu die in 2.3 definierte Abbildung $\pi : G_n \rightarrow H_n$, die jedem $g \in G_n$ die induzierte Permutation auf der Menge $X \times \{1, \dots, n\}$ zuordnet. π läßt sich fortsetzen auf \mathcal{M} , wobei $\pi(\alpha)$ eine injektive Abbildung von $X \times \{1, \dots, n\}$ in sich selbst ist, die die Elemente in $X \times \{i\}$ ab x_0 um m_i verschiebt (dabei stammt m_i von α).

Jedes Element (x, j) , das in $(X \times \{1, \dots, n\} - (X \times \{1, \dots, n\})\pi(\alpha))$ liegt, gehört zu Fall 1. Die Anzahl der Elemente in $(X \times \{1, \dots, n\} - (X \times \{1, \dots, n\})\pi(\alpha))$ ist aber gerade $\sum_{i=1}^n m_i$. Analog zeigt man, daß es genau $\sum_{i=1}^n m_i$ viele (η, i) gibt, die zu Fall 1 gehören, d.h. mit $k := \sum_{i=1}^n m_i$ folgt die Behauptung. \square

Definition: Für ein α aus \mathcal{M} heißt die eindeutig bestimmte positive ganze Zahl k aus Lemma 3.4 der *Grad* von α . Dieser Grad wird im folgenden mit $gr(\alpha)$ bezeichnet.

Bemerkung: Allgemein versteht man bezüglich einer partiell geordneten Menge M unter dem Grad eines Elementes a aus M das Supremum aller Längen von Ketten aus M , die a als größtes Element besitzen (vgl. [Qu]). Wir zeigen in 3.2.2, daß die aus Lemma 3.4 stammende Zahl k genau den Grad gemäß dieser Auffassung angibt, sodaß obige Definition gerechtfertigt ist.

In Abschnitt 1.2 haben wir Untergruppen von G_n untersucht, deren Elemente außerhalb einer Menge der in Lemma 3.4 beschriebenen Form die Identität sind. Im Hinblick auf Lemma 2.1 sowie Bemerkung 2.2 ergibt sich folgendes Resultat.

Korollar 3.5 *Für ein α aus \mathcal{M} mit $k := gr(\alpha) \geq 1$ ist $\text{Stab}_{G_n}(\alpha)$ vom Typ $(\text{FP})_{2k-1}$ und nicht vom Typ $(\text{FP})_{2k}$. Im Fall $2k \geq 3$ ist er zusätzlich endlich präsentiert.*

Das heißt für Simplizes $(\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ aus $|\mathcal{M}|$ mit $2gr(\alpha_0) \geq n+1$ ist der Stabilisator $\text{Stab}_{G_n}(\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ vom Typ $(\text{FP})_n$ und für $n \geq 3$ endlich präsentiert. Aus diesem Grunde ist es erforderlich, zur Konstruktion des Simplicialkomplexes nur diejenigen α aus \mathcal{M} zu benutzen mit $2gr(\alpha) \geq n+1$. Wegen $2n \geq n+1$ für alle n aus \mathbb{N} , kann man sich auf Elemente beschränken, deren Grad mindestens n beträgt. Im Anschluß an den nächsten Abschnitt zeigen wir, daß sich aus diesen Elementen ein Simplicialkomplex ergibt, der alle geforderten Voraussetzungen erfüllt. Zuvor erläutern wir einige Eigenschaften des Grades.

3.2.2 Eigenschaften des Grades

Wir zeigen in diesem Abschnitt den Zusammenhang zwischen dem in 3.2.1 definierten Grad eines Elementes α und gewissen Ketten aus \mathcal{M} . Es stellt sich heraus, daß $gr(\alpha)$ die größte ganze Zahl k ist, sodaß es eine Kette der Form $\alpha = \alpha_k > \alpha_{k-1} > \dots > \alpha_0$ in \mathcal{M} gibt.

Die maximale Länge einer solchen Kette ist erst erreicht, wenn für alle $i = 1, \dots, k$ ein $t_{j_i} \in \{1, \dots, n\}$ (t_1, \dots, t_n sind die Erzeugenden von T) existiert mit

$$(3.6) \quad \alpha_i = t_{j_i} \alpha_{i-1} .$$

(Ansonsten könnte durch Einschieben neuer Elemente die gegebene Kette verlängert werden, zum Beispiel läßt sich aus $t_i t_j \beta > \beta$ die Kette $t_i t_j \beta > t_j \beta > \beta$ bilden).

Wir untersuchen daher zunächst das Verhalten des Grades hinsichtlich zweier Elemente aus \mathcal{M} , die sich nur durch Vorschalten einer Translation t_i voneinander unterscheiden.

Lemma 3.6 *Für α und β aus \mathcal{M} mit $t_i \beta = \alpha$ ist $gr(\beta) = gr(\alpha) - 1$.*

BEWEIS: Aus $t_i\beta = \alpha$ folgt $S(t_i\beta) = S\alpha$. Wir zeigen nun

$$(3.7) \quad S - S\alpha = (S - S\beta) \cup (S - St_i)\beta$$

Bew.: Sei $s \in S$, $s \notin S\alpha = St_i\beta$. Da $St_i \subseteq S$, also $St_i\beta \subseteq S\beta$, ist dies äquivalent zu: $s \notin S\beta$ (also $s \in S - S\beta$) oder $s \in S\beta - St_i\beta$. Wegen der Injektivität von β ist $S\beta - St_i\beta = (S - St_i)\beta$, d.h. entweder ist $s \in S - S\beta$ oder $s \in (S - St_i)\beta$.

Nun ist $S - St_i = \{((1, y), i) \mid y \in \mathbb{N}\} \cup \{((x, 1), i) \mid x \in \mathbb{N}\}$ (s. Abbildung 16).

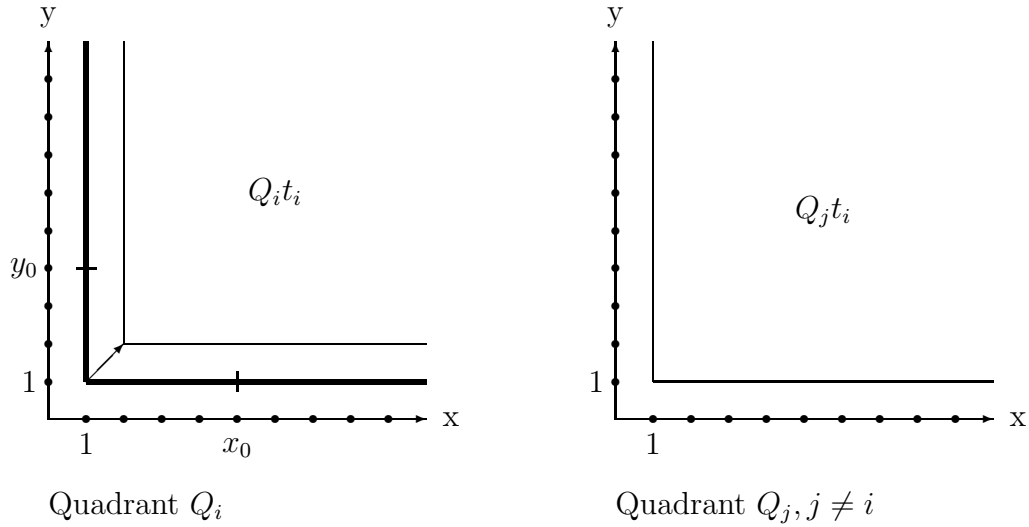


Abbildung 16: Die fettgedruckten Linien entsprechen der Menge $S - St_i = Q_i - Q_i t_i$

Die Bildmenge von $\{((x, 1), i) \mid x \geq x_0\}$ unter β ist von der Form (vgl. B₂(a))

$$((x, 1)', \geq m)$$

für ein $(x, 1)' \in X \times \{1, \dots, n\}$, $m \in \mathbb{N}$, und die Bildmenge von $\{((1, y), i) \mid y \geq y_0\}$ lässt sich schreiben als (vgl. B₂(b))

$$((y, 1)', \geq l)$$

für ein $(y, 1)' \in Y \times \{1, \dots, n\}$, $l \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$(3.8) \quad (S - St_i)\beta = ((x, 1)', \geq m) \cup ((y, 1)', \geq l) \cup E,$$

wobei $E := \{((x, 1), i) \mid 1 \leq x < x_0\}\beta \cup \{((1, y), i) \mid 1 \leq y < y_0\}\beta$ eine endliche und zu $((x, 1)', \geq m) \cup ((y, 1)', \geq l)$ disjunkte Menge ist. Sei nun $gr(\beta) = k$ und

$$(3.9) \quad \begin{aligned} S - S\beta &= ((x_1, i_1), \geq n_1) \cup \dots \cup ((x_k, i_k), \geq n_k) \cup \\ &\quad ((y_1, j_1), \geq l_1) \cup \dots \cup ((y_k, j_k), \geq l_k) \cup \\ &\quad P \end{aligned}$$

eine wie in Lemma 3.4 beschriebene Zerlegung der Menge $S - S\beta$. Nach (3.8) gilt $S - S\alpha = (S - S\beta) \cup (S - St_i)\beta$, wobei $(S - St_i)\beta \subseteq S\beta$, also disjunkt zu $S - S\beta$ ist. Schreiben wir $(S - St_i)\beta$ wie in (3.9) und $S - S\beta$ wie in (3.10), so erhalten wir $S - S\alpha$ als disjunkte Vereinigung der Mengen

$$\begin{aligned} & ((x_1, i_1), \geq n_1) \cup \dots \cup ((x_k, i_k), \geq n_k) \cup ((x, 1)', \geq m) \cup \\ & ((y_1, j_1), \geq l_1) \cup \dots \cup ((y_k, j_k), \geq l_k) \cup ((y, 1)', \geq l) \cup \\ & P \cup E, \end{aligned}$$

d.h. $gr(\alpha) = k + 1 = gr(\beta) + 1$. □

Weiterhin benötigen wir

Lemma 3.7 *Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Es existiert genau dann ein β aus \mathcal{M} mit $t_i\beta = \alpha$, wenn $gr(\alpha) > 0$ ist.*

BEWEIS: Die Notwendigkeit von $gr(\alpha) > 0$ ergibt sich aus dem vorigen Lemma und der Eigenschaft $gr(\gamma) \geq 0$ für alle $\gamma \in \mathcal{M}$.

Für die umgekehrte Richtung setzen wir $k := gr(\alpha)$, $k > 0$. Dann existieren in $S - S\alpha$ mindestens zwei zueinander disjunkte Mengen der Form

$$\begin{aligned} & ((y_1, j_1), \geq l_1) \quad \text{mit} \quad (y_1, j_1) \in Y \times \{1, \dots, n\}, l_1 \in \mathbb{N} \quad \text{sowie} \\ & ((x_1, i_1), \geq n_1) \quad \text{mit} \quad (x_1, i_1) \in X \times \{1, \dots, n\}, n_1 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wir definieren nun β auf der Menge St_i als $t_i^{-1}\alpha$; und auf der Menge $S - St_i = \{((x, 1), i) \mid x \in \mathbb{N}\} \cup \{((1, y), i) \mid y \in \mathbb{N}\}$ setzen wir (s. Abbildung 17)

$$\begin{aligned} (3.10) \quad & ((1, y), i)\beta : = ((x_1, y + n_1 - 1), i_1) \quad \text{für alle} \quad y \in \mathbb{N}, \\ & ((x, 1), i)\beta : = ((x + l_1 - 2, y_1), j_1) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{N}, x \geq 2. \end{aligned}$$

Damit β in \mathcal{M} liegt, muß es injektiv sein und die Bedingungen B_1, B_2 erfüllen.

Injektivität: Offensichtlich ist β auf den Mengen St_i und $S - St_i$ jeweils injektiv. Dabei ist $(St_i)\beta = S\alpha$ und $(S - St_i)\beta = ((y_1, j_1), \geq l_1) \cup ((x_1, i_1), \geq n_1) \subseteq (S - S\alpha)$. Also gilt

$$(St_i)\beta \cap (S - St_i)\beta \subseteq S\alpha \cap (S - S\alpha) = \emptyset,$$

d.h. β ist auf ganz S injektiv.

Bedingung B_1 : Außerhalb von Q_i stimmt β mit α überein; wir müssen also nur noch das Verhalten von β in Q_i untersuchen. Verschiebt α die Elemente aus Q_i ab $p_0 = (x_0, y_0)$ um den Vektor (m_i, m_i) , so verschiebt β ab $p'_0 := (x_0 + 1, y_0 + 1)$ um $(m_i - 1, m_i - 1)$:

$$\begin{aligned}
((x, y), i)\beta &= ((x, y), i)t_i^{-1}\alpha \\
&= ((x-1, y-1), i)\alpha & \forall (x, y) \geq (x_0+1, y_0+1) . \\
&= ((x+m_i-1, y+m_i-1), i)
\end{aligned}$$

Bedingung B₂(a): Wir identifizieren $((x, y), i)$ aus S mit $((x, i), y)$. Für $(x, i) \in X \times \{1, \dots, n\}$ gilt

$$((x, i), y)\alpha = ((x, i)', y + q_{(x, i)}) \quad \text{für alle } y \geq y_0 ,$$

wobei $(x, i)' \in X \times \{1, \dots, n\}$ und $q \in \mathbb{Z}$ ist. Daraus erhält man für alle $x \geq 2$:

$$\begin{aligned}
((x, i), y)\beta &= ((x, i), y)t_i^{-1}\alpha \\
&= ((x-1, i), y-1)\alpha & \forall y \geq y_0+1 . \\
&= ((x-1, i)', y + q_{(x-1, i)} - 1)
\end{aligned}$$

Für $(1, i) \in X \times \{1, \dots, n\}$ erfüllt β B₂(a) wegen (3.11). Die Bedingung B₂(b) zeigt man analog. \square

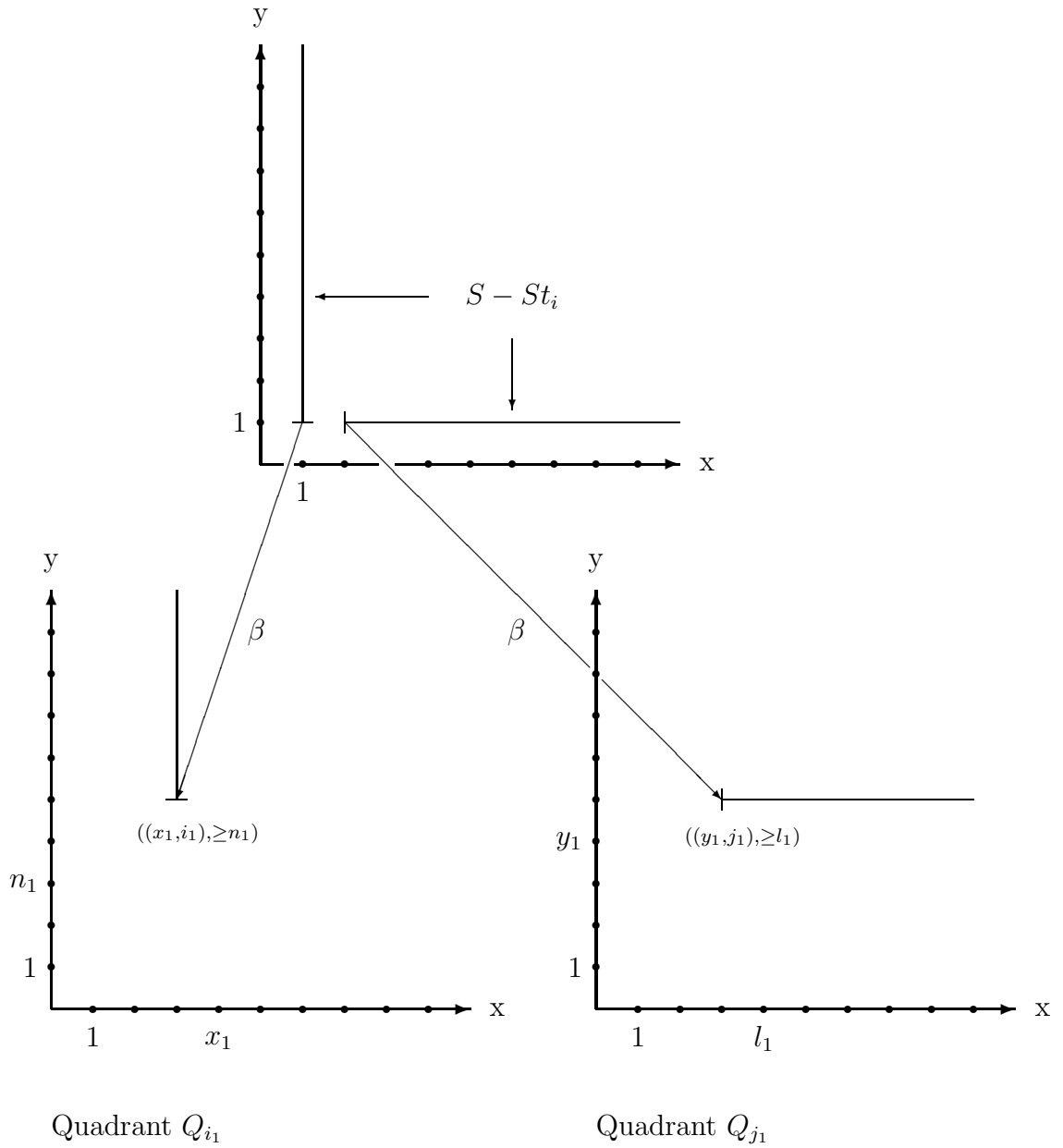


Abbildung 17: Definition von β auf $S - St_i$

Bemerkung 3.2 : Das Element β aus dem letzten Lemma ist nicht eindeutig bestimmt. Wie aus dem Beweis des Lemmas ersichtlich wird, gibt es beliebig viele Möglichkeiten für die Wahl eines solchen β 's. Insbesondere existiert im Falle $gr(\alpha) = 1$ ein β aus G_n mit $t_i\beta = \alpha$. Da dann $S - S\alpha$ von der Form

$$S - S\alpha = ((x_1, i_1), \geq n_1) \cup ((y_1, j_1), \geq l_1) \cup (P = \{p_1, \dots, p_r\})$$

ist, können wir die Menge $S - St_i$ *surjektiv* (s. Abbildung 18) auf $S - S\alpha$ abbilden:

$$\begin{aligned} ((x, 1), i)\beta &:= ((x + l_1 - 1, y_1), j_1) && \text{für alle } x \in \mathbb{N} \\ ((1, y + r + 1), i)\beta &:= ((x_1, y + n_1 - 1), i_1) && \text{für alle } y \in \mathbb{N} \text{ und} \\ ((1, y), i)\beta &:= p_y && \text{für } 1 \leq y \leq r. \end{aligned}$$

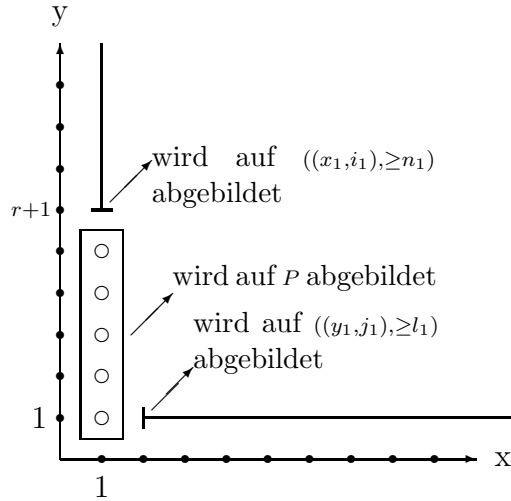


Abbildung 18: Definition von β im Falle $gr(\alpha) = 1$

Mit den vorangegangenen beiden Lemmata erhalten wir nun:

Korollar 3.8 Für α aus \mathcal{M} ist $gr(\alpha)$ die größte ganze Zahl k , so daß es eine Kette der Form $\alpha = \alpha_k > \alpha_{k-1} > \dots > \alpha_0$ in \mathcal{M} gibt.

BEWEIS: Sei $\alpha = \alpha_k > \alpha_{k-1} > \dots > \alpha_0$ eine Kette ausgehend von α mit maximaler Länge k . Dann gilt für alle $i = 1, \dots, k$ (vgl. (3.7))

$$\alpha_i = t_{j_i}\alpha_{i-1}.$$

Mit Lemma 3.6 folgt daraus $gr(\alpha_i) = gr(\alpha_{i-1}) + 1$, und somit

$$gr(\alpha) = gr(\alpha_k) = gr(\alpha_0) + k.$$

Wegen Lemma 3.7 muß $gr(\alpha_0) = 0$ sein (sonst ließe sich die gegebene Kette verlängern), d.h. $gr(\alpha) = k$. \square

Bemerkung 3.3 : Die Funktion $gr : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}_0$, die jedem α aus \mathcal{M} den Grad $gr(\alpha)$ zuordnet, ist wegen dem letzten Korollar ordnungserhaltend (bzw sogar streng monoton wachsend).

3.3 Der Simplicialkomplex $|\mathcal{M}^n|$

Es sei $\mathcal{M}^n := \{\alpha \in \mathcal{M} \mid gr(\alpha) \geq n\}$. \mathcal{M}^n ist als Teilmenge von \mathcal{M} ebenfalls eine partiell geordnete Menge, und der zu \mathcal{M}^n gehörige Simplicialkomplex $|\mathcal{M}^n|$ ist ein Unterkomplex von $|\mathcal{M}|$. Wir zeigen, daß $|\mathcal{M}^n|$ invariant unter der Operation von G_n ist:

Lemma 3.9 Für alle α aus \mathcal{M} sowie g aus G_n ist $gr(\alpha g) = gr(\alpha)$.

BEWEIS: Jede Kette der Form

$$(a) \quad \alpha = \alpha_k > \alpha_{k-1} > \dots > \alpha_0 \quad \text{mit} \quad t_{i_j} \alpha_{j-1} = \alpha_j$$

für alle $j = 1, \dots, k$ liefert eine Kette (G_n operiert ordnungserhaltend auf \mathcal{M})

$$(b) \quad \alpha g = \alpha_k g > \alpha_{k-1} g > \dots > \alpha_0 g \quad \text{mit} \quad t_{i_j} \alpha_{j-1} = \alpha_j$$

für $j = 1, \dots, k$. Umgekehrt erhält man aus jeder Kette ausgehend von αg durch Multiplikation mit g^{-1} eine Kette ausgehend von α derselben Länge k . Aus Korollar 3.8 somit folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 3.4: Da für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{M}$ mit $\alpha_1 < \alpha_2$ auch $\alpha_1 \beta < \alpha_2 \beta$ ist ($t\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow t(\alpha_1 \beta) = (t\alpha_1) \beta = \alpha_2 \beta$), gilt $gr(\alpha) \leq gr(\alpha \beta)$ für alle α, β aus \mathcal{M} .

Wegen Lemma 3.9 ist $|\mathcal{M}^n|$ ein G_n -Komplex, wobei nach den Ergebnissen aus 3.2.1 (Korollar 3.5) die Stabilisatoren jedes p-Simplexes aus $|\mathcal{M}^n|$ mindestens vom Typ $(FP)_n$ und für $n \geq 3$ (eigentlich schon für $n \geq 2$) endlich präsentiert sind.

Es bleibt zu zeigen, daß der Komplex $|\mathcal{M}^n|$ ebenfalls zusammenziehbar ist. Wir wissen nach Lemma 3.1, daß für alle α aus \mathcal{M}^n ein $t \in T$ existiert mit $\alpha \leq t$. Nun gilt (gr ist ordnungserhaltend, s. Bemerkung 3.3)

$$gr(t) \geq gr(\alpha) \geq n,$$

d.h. t liegt in \mathcal{M}^n . Daraus ergibt sich wie im Beweis von Korollar 3.2, daß \mathcal{M}^n eine gerichtete Menge und somit $|\mathcal{M}^n|$ zusammenziehbar ist.

Bemerkung 3.5 : Die maximal mögliche Länge einer Kette der Form $\alpha = \alpha_k > \alpha_{k-1} > \dots > \alpha_0$ mit $\alpha_i \in \mathcal{M}^n$ für alle $i = 0, \dots, k$ ist gerade $gr(\alpha) - n$.

4 Filtrierung von $|\mathcal{M}^n|$

Ähnlich wie bei den Houghtongruppen filtrieren wir den G_n -Komplex $|\mathcal{M}^n|$ mit Hilfe der Teilmengen

$$\mathcal{M}^{[n,k]} := \{\alpha \in \mathcal{M} \mid n \leq gr(\alpha) \leq k\}$$

von \mathcal{M}^n , wobei k eine natürliche Zahl $\geq n$ ist. Die Familie der Unterkomplexe $\{|\mathcal{M}^{[n,k]}|\}_{k \geq n}$ bildet eine Filtrierung von $|\mathcal{M}^n|$, wobei sich die G_n -Invarianz der einzelnen $|\mathcal{M}^{[n,k]}|$ aus der Beziehung $gr(\alpha g) = gr(\alpha)$ (vgl. Lemma 3.9) ergibt.

Um Korollar 1.3 anwenden zu können, bleibt zu zeigen, daß jeder dieser Unterkomplexe $|\mathcal{M}^{[n,k]}| \bmod G_n$ endlich ist, und daß für hinreichend große k $|\mathcal{M}^{[n,k+1]}|$ bis auf Homotopie aus $|\mathcal{M}^{[n,k]}|$ durch Hinzufügen von n -Zellen entsteht. Dies wollen wir in den nächsten beiden Abschnitten 4.1 und 4.2 tun.

4.1 Die Unterkomplexe der Filtrierung mod G_n

Für ein p -Simplex $(\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ aus $|\mathcal{M}^n|$ gibt es zu jedem $i \in \{1, \dots, p\}$ ein t_{α_i} aus T mit

$$\alpha_i = t_{\alpha_i} \alpha_{i-1}.$$

Dabei ist $t_{\alpha_i} = \alpha_i(\alpha_{i-1})^{-1}$, also eindeutig bestimmt. Wir werden nun die Bahn von $(\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ unter der Operation von G_n mit Hilfe des p -Tupels $(t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_p}) \in T^p$ charakterisieren.

Lemma 4.1 *Seien $(\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ und $(\beta_0, \dots, \beta_p)$ zwei p -Simplizes aus $|\mathcal{M}^n|$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) *Es gibt ein $g \in G_n$ mit $(\alpha_0, \dots, \alpha_p)g = (\beta_0, \dots, \beta_p)$*
- (ii) *$gr(\alpha_0) = gr(\beta_0)$ und $(t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_p}) = (t_{\beta_1}, \dots, t_{\beta_p})$.*

BEWEIS: (i) \Rightarrow (ii)

Für alle $i = 0, \dots, p$ ist $\alpha_i g = \beta_i$. Wegen Lemma 3.9 gilt somit $gr(\alpha_0) = gr(\alpha_0 g) = gr(\beta_0)$. Weiterhin erhält man für alle $i = 1, \dots, p$

$$\begin{aligned} t_{\alpha_i} \beta_{i-1} &= t_{\alpha_i} (\alpha_{i-1} g) \\ &= (t_{\alpha_i} \alpha_{i-1}) g \\ &= \alpha_i g = \beta_i, \end{aligned}$$

woraus wegen der Eindeutigkeit von t_{β_i} folgt: $t_{\alpha_i} = t_{\beta_i}$.

(ii) \Rightarrow (i): Wir konstruieren ein $g \in G_n$ mit $\alpha_0 g = \beta_0$. Daraus folgt wegen $(t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_p}) = (t_{\beta_1}, \dots, t_{\beta_p})$ für alle $i = 1, \dots, p$:

$$\begin{aligned} \alpha_i g &= t_{\alpha_i} t_{\alpha_{i-1}} \cdot \dots \cdot t_{\alpha_1} \alpha_0 g \\ &= t_{\beta_i} t_{\beta_{i-1}} \cdot \dots \cdot t_{\beta_1} \beta_0 \\ &= \beta_i. \end{aligned}$$

Konstruktion von g : Sei $k := gr(\alpha_0) = gr(\beta_0)$. Wir wenden nun ausgehend von α_0 bzw. β_0 k -mal Lemma 3.7 mit $i = 1$ an und erhalten jeweils eine Kette der Form

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \alpha_{0,k} > \alpha_{0,k-1} > \dots > \alpha_{0,1} > \alpha_{0,0} \quad \text{bzw.} \\ \beta_0 &= \beta_{0,k} > \beta_{0,k-1} > \dots > \beta_{0,1} > \beta_{0,0},\end{aligned}$$

wobei $\alpha_{0,j} = t_1 \alpha_{0,j-1}$ bzw. $\beta_{0,j} = t_1 \beta_{0,j-1}$ für alle $j = 1, \dots, k$ ist. Nach Lemma 3.6 ist $gr(\alpha_{0,j}) = j$, also insbesondere $gr(\alpha_{0,1}) = 1$, weshalb es möglich ist, $\alpha_{0,0}$ aus G_n zu wählen (s. Bemerkung 3.2). Dasselbe gilt für $\beta_{0,0}$. Dann ist

$$g := (\alpha_{0,0})^{-1} \beta_{0,0}$$

aus G_n , und wegen $\alpha_0 = t_1^k \alpha_{0,0}$ bzw. $\beta_0 = t_1^k \beta_{0,0}$ erhalten wir $\alpha_0 g = t_1^k \alpha_{0,0} g = t_1^k \alpha_{0,0} (\alpha_{0,0})^{-1} \beta_{0,0} = t_1^k \beta_{0,0} = \beta_0$. \square

Behauptung 4.2 *Die Menge $T_{\leq k} := \{t \in T \mid gr(t) \leq k\}$ ist endlich.*

BEWEIS: T wird erzeugt von t_1, \dots, t_n , d.h. jedes $t \in T$ läßt sich schreiben als

$$t = d_1 \cdot \dots \cdot d_m \quad \text{mit} \quad d_i \in \{t_1, \dots, t_n\}.$$

Daraus ergibt sich eine Kette der Form $t = d_1 \cdot \dots \cdot d_m > d_2 \cdot \dots \cdot d_m > \dots > d_m > id$, woraus nach Korollar 3.8 folgt: $gr(t) \geq m$. Somit ist

$$T_{\leq k} \subseteq \{d_1 \cdot \dots \cdot d_m \in T \mid d_i \in \{t_1, \dots, t_n\}, i = 1, \dots, m \quad \text{und} \quad m \leq k\}.$$

Letztere Menge ist endlich, d.h. auch $T_{\leq k}$ ist endlich. \square

Korollar 4.3 *Der Simplicialkomplex $|\mathcal{M}^{[n,k]}|$ ist endlich mod G_n .*

BEWEIS: Wegen Bemerkung 3.5 ist die Dimension von $|\mathcal{M}^n|$ endlich. Es genügt daher zu zeigen, daß die Menge aller p -Simplizes (für festes p) endlich ist mod G_n .

Wir ordnen dazu der Bahn eines p -Simplexes $(\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ das Paar

$$(gr(\alpha_0), (t^{(1)}, \dots, t^{(p)})) \in [n, k] \times (T^p)$$

zu $([n, k] = \{j \in \mathbb{N} \mid n \leq j \leq k\})$, wobei $t^{(i)} \alpha_{i-1} = \alpha_i$, $1 \leq i \leq p$ ist. Nach dem vorigen Lemma ist diese Zuordnung wohldefiniert und injektiv. Nun gilt

$$\begin{aligned}gr(t^{(i)}) &\leq gr(t^{(i)} \alpha_{i-1}) \quad (\text{vgl. Bemerkung 3.4}) \\ &= gr(\alpha_i) \\ &\leq k \quad \text{für alle} \quad i = 1, \dots, p,\end{aligned}$$

d.h. $(t^{(1)}, \dots, t^{(p)}) \in (T_{\leq k})^p$, also $(gr(\alpha_0), (t^{(1)}, \dots, t^{(p)})) \in [n, k] \times (T_{\leq k})^p$. Nach der letzten Behauptung ist $(T_{\leq k})^p$ und damit auch $[n, k] \times (T_{\leq k})^p$ endlich. Wegen der Injektivität obiger Zuordnung kann es demnach nur endlich viele verschiedenen Bahnen geben. \square

4.2 Homotopieeigenschaften von $|\mathcal{M}^{[n,k]}| \subseteq |\mathcal{M}^{[n,k+1]}|$

Wir benötigen im folgenden zu gegebenem α aus \mathcal{M} die Mengen

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{<\alpha} &:= \{\beta \in \mathcal{M} \mid \beta < \alpha\} \quad \text{bzw.} \\ \mathcal{M}_{\leq \alpha} &:= \{\beta \in \mathcal{M} \mid \beta \leq \alpha\} \quad \text{und} \\ \mathcal{M}_{<\alpha}^n &:= \mathcal{M}^n \cap \mathcal{M}_{<\alpha}.\end{aligned}$$

Im letzten Abschnitt dieser Arbeit zeigen wir, daß für ein α aus \mathcal{M} mit $gr(\alpha) \geq 2n$ der Simplicialkomplex $|\mathcal{M}_{<\alpha}^n|$ homotopieäquivalent zu einem $(n-1)$ -dimensionalen Sphärenbouquet ist.

Mit derselben Argumentation wie bei den Houghton-Gruppen ($|\mathcal{M}^{[n,k+1]}|$ entsteht aus $|\mathcal{M}^{[n,k]}|$ durch Hinzufügen eines Kegels über $\mathcal{M}_{<\alpha}^n$ für jedes α mit $gr(\alpha) = k+1$, vgl. Abschnitt 1.3, Schritt 2), ergibt sich daraus, daß man $|\mathcal{M}^{[n,k+1]}|$ bis auf Homotopie aus $|\mathcal{M}^{[n,k]}|$ durch Hinzufügen von n -Zellen erhält.

Der Nachweis dieser Homotopieäquivalenz geschieht in zwei Schritten. Zuerst wird eine Überdeckung von $|\mathcal{M}_{<\alpha}^n|$ konstruiert, deren Nerv homotopieäquivalent zu $|\mathcal{M}_{<\alpha}^n|$ ist. Anschließend zeigen wir, daß dieser Nerv einer speziellen Art kombinatorischer Simplicialkomplexe angehört, die vom Homotopietyp eines $(n-1)$ -dimensionalen Sphärenbouquets sind.

4.2.1 Eine Überdeckung von $|\mathcal{M}_{<\alpha}^n|$

Wir betrachten die maximalen Elemente in $\mathcal{M}_{<\alpha}^n$, d.h. solche Elemente β aus \mathcal{M} mit der Eigenschaft

$$t_i \beta = \alpha$$

für ein $i \in \{1, \dots, n\}$. $|\mathcal{M}_{<\alpha}^n|$ kann durch die Unterkomplexe $|\mathcal{M}_{\leq \beta}^n|$ überdeckt werden, wobei β die Menge aller maximalen Elemente von $\mathcal{M}_{<\alpha}^n$ durchläuft. Den Nerv dieser Überdeckung bezeichnen wir mit \mathcal{N}_α .

Um zu zeigen, daß \mathcal{N}_α homotopieäquivalent zu $|\mathcal{M}_{<\alpha}^n|$ ist, genügt es nach Korollar 1.8, zu jeder endlichen Menge $\{\beta_1, \dots, \beta_p\}$ bestehend aus maximalen Elementen von $\mathcal{M}_{<\alpha}^n$, die in \mathcal{M}^n nach unten beschränkt ist, die Existenz einer *größten* unteren Schranke in \mathcal{M}^n nachzuweisen.

Zu diesem Zweck beschreiben wir das Vorhandensein einer unteren Schranke der $\{\beta_1, \dots, \beta_p\}$ durch eine dazu äquivalente Eigenschaft der maximalen Elemente β_i .

Definition: Zu β aus \mathcal{M} mit $t_i \beta = \alpha$ sei $\bar{\beta}_i$ die Einschränkung von β auf die Menge $S - St_i$. $B(\bar{\beta}_i) := (S - St_i)\bar{\beta}_i$ sei die Bildmenge von $\bar{\beta}_i$.

Wegen $(St_i)\beta = S\alpha$ muß

$$(4.11) \quad B(\bar{\beta}_i) \subseteq (S - S\alpha)$$

sein. Mit Hilfe von $\bar{\beta}_i$ und $B(\bar{\beta}_i)$ erhalten wir folgendes Kriterium:

Lemma 4.4 Sei α aus \mathcal{M} und $\{\beta_1, \dots, \beta_p\}$ eine Menge maximaler Elemente aus $\mathcal{M}_{<\alpha}^n$. Für $gr(\alpha) \geq 2n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $\{\beta_1, \dots, \beta_p\}$ ist in \mathcal{M}^n nach unten beschränkt
- (ii) Für $\bar{\beta}_{i_1}, \dots, \bar{\beta}_{i_p}$ und $B(\bar{\beta}_{i_1}), \dots, B(\bar{\beta}_{i_p})$ gilt für alle $\nu, \mu \in \{1, \dots, p\}$, $\nu \neq \mu$:

$$i_\nu \neq i_\mu \quad \text{und} \quad B(\bar{\beta}_{i_\nu}) \cap B(\bar{\beta}_{i_\mu}) = \emptyset.$$

BEWEIS: (i) \Rightarrow (ii): Sei $\delta \in \mathcal{M}^n$ die gemeinsame untere Schranke der β_i 's, also

$$d_i \delta = \beta_i \quad \text{mit} \quad d_i \in T$$

für alle $i = 1, \dots, p$. Angenommen $t_{i_\nu} \beta_\nu = \alpha$ und $t_{i_\mu} \beta_\mu = \alpha$. Dann ist

$$\begin{aligned} t_{i_\nu} \beta_\nu &= t_{i_\mu} \beta_\mu \\ \Leftrightarrow t_{i_\nu} d_\nu \delta &= t_{i_\mu} d_\mu \delta \\ \Leftrightarrow t_{i_\nu} d_\nu &= t_{i_\mu} d_\mu \quad (\delta \text{ injektiv}) \\ \Leftrightarrow d_\nu t_{i_\nu} &= d_\mu t_{i_\mu} \quad (T \text{ kommutativ}) \\ \Leftrightarrow d_\nu &= d_\mu \quad (t_{i_\nu} \text{ injektiv}) \\ \Leftrightarrow \beta_\nu &= \beta_\mu \quad \text{bzw. } \nu = \mu. \end{aligned}$$

Somit ist für $\nu \neq \mu$ auch $i_\nu \neq i_\mu$. Wir betrachten nun die Quadranten Q_j , die jeweils T -invariante Teilmengen von S sind. Es gilt also für $\nu \neq \mu$

$$\begin{aligned} Q_{i_\nu} d_\nu \cap Q_{i_\mu} d_\mu &= \emptyset \\ \Rightarrow Q_{i_\nu} d_\nu \delta \cap Q_{i_\mu} d_\mu \delta &= \emptyset \quad (\delta \text{ injektiv}) \\ \Leftrightarrow Q_{i_\nu} \beta_\nu \cap Q_{i_\mu} \beta_\mu &= \emptyset. \end{aligned}$$

Nun ist $B(\bar{\beta}_{i_\nu}) = (S - St_{i_\nu}) \beta_\nu \subseteq Q_{i_\nu} \beta_\nu$ (da $(S - St_{i_\nu}) \subseteq Q_{i_\nu}$, vgl. Abbildung 16), und analog $B(\bar{\beta}_{i_\mu}) \subseteq Q_{i_\mu} \beta_\mu$, d.h. $B(\bar{\beta}_{i_\nu}) \cap B(\bar{\beta}_{i_\mu}) = \emptyset$.

(ii) \Rightarrow (i): Wir definieren die gesuchte untere Schranke δ mit Hilfe von α und den einzelnen $\bar{\beta}_i$'s.

Ist $t_{i_\nu} \beta_\nu = \alpha$ für $\nu = 1, \dots, p$, so sei δ auf der Menge $St_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_p}$ die Abbildung $t_{i_1}^{-1} \cdot \dots \cdot t_{i_p}^{-1} \alpha$. Die verbleibende Menge $S - St_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_p}$ ist die disjunkte Vereinigung der $S - St_{i_\nu}$, $\nu = 1, \dots, p$. ($S = Q_1 \cup \dots \cup Q_n$. Außerhalb von $Q_{i_1} \cup \dots \cup Q_{i_p}$ ist $t_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_p}$ die Identität, d.h. die Quadranten Q_j , $j \in \{1, \dots, n\} - \{i_1, \dots, i_p\}$ sind in $St_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_p}$ enthalten. Somit ist

$$\begin{aligned} S - St_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_p} &= (Q_{i_1} \cup \dots \cup Q_{i_p}) - (Q_{i_1} \cup \dots \cup Q_{i_p}) t_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_p} \\ &= (Q_{i_1} \cup \dots \cup Q_{i_p}) - (Q_{i_1} t_{i_1} \cup \dots \cup Q_{i_p} t_{i_p}) \\ &\quad (t_{i_j} \text{ ist außerhalb von } Q_{i_j} \text{ die Identität}) \\ &= (Q_{i_1} - Q_{i_1} t_{i_1}) \cup \dots \cup (Q_{i_p} - Q_{i_p} t_{i_p}) \\ &\quad (\text{die einzelnen } Q_{i_j} \text{'s sind jeweils } t_{i_j} \text{- invariant}), \end{aligned}$$

wobei $Q_{i_\nu} - Q_{i_\nu} t_{i_\nu} = S - St_{i_\nu}$ ist (vgl. Abbildung 16)). Wir definieren δ auf $S - St_{i_\nu}$ als $\bar{\beta}_{i_\nu}$, $\nu = 1, \dots, p$.

Behauptung 1: $\delta \in \mathcal{M}^n$

Beweis: δ ist injektiv auf $S - St_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_p}$, da die einzelnen t_{i_ν} 's und α injektiv sind, und δ ist injektiv auf $S - St_{i_\nu}$ für $\nu = 1, \dots, p$, da die $\bar{\beta}_{i_\nu}$'s injektiv sind. Wegen

$$(St_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_p})\delta = S\alpha \quad \text{und}$$

$$(S - St_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_p})\delta = \bigcup_{\nu=1}^p (S - St_{i_\nu})\bar{\beta}_{i_\nu} \subseteq S - S\alpha \quad (\text{s. (4.12)}),$$

ist $(St_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_p})\delta \cap (S - St_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_p})\delta = \emptyset$, d.h. δ ist injektiv auf ganz S . Das δ die Bedingungen B_1 und B_2 erfüllt, zeigt man ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.7. Es gilt also: $\delta \in \mathcal{M}$. Nun ist

$$\begin{aligned} gr(\delta) &= gr(t_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_p}\delta) - p \quad (\text{nach Lemma 3.6}) \\ &= gr(\alpha) - p \\ &\geq 2n - p \\ &\geq 2n - n = n \quad (\text{wegen } i_\nu \neq i_\mu \text{ ist } p \leq n), \end{aligned}$$

d.h. $\delta \in \mathcal{M}^n$.

Behauptung 2: δ ist gemeinsame untere Schranke der β_1, \dots, β_p

Beweis: Es sei $\delta_j := t_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_{j-1}} t_{i_{j+1}} \cdot \dots \cdot t_{i_p} \delta$, $j = 1, \dots, p$. Wir zeigen: $\delta_j = \beta_j$. Für δ_j gilt:

$$t_{i_j} \delta_j = t_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_p} \delta = \alpha = t_{i_j} \beta_j,$$

d.h. δ_j und β_j stimmen auf der Menge St_{i_j} überein. Auf der Menge $S - St_{i_j} \subseteq Q_{i_j}$ ist δ_j gerade δ ($t_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_{j-1}} t_{i_{j+1}} \cdot \dots \cdot t_{i_p}$ ist eingeschränkt auf Q_j die Identität), und δ ist nach Definition $\bar{\beta}_{i_j}$. \square

Im Falle (ii) aus Lemma 4.4 läßt sich nun eine größte gemeinsame untere Schranke der β_i 's angeben.

Lemma 4.5 *Sind die Voraussetzungen von Lemma 4.4 sowie (ii) erfüllt, so gibt es in \mathcal{M}^n eine größte gemeinsame untere Schranke der β_1, \dots, β_p .*

BEWEIS: Wir zeigen, daß die im Beweis von Lemma 4.4 konstruierte untere Schranke δ schon die größte untere Schranke von $\{\beta_1, \dots, \beta_p\}$ ist. Für $j = 1, \dots, p$ war

$$(4.12) \quad t_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_{j-1}} t_{i_{j+1}} \cdot \dots \cdot t_{i_p} \delta = \beta_j.$$

Sei nun γ eine weitere untere Schranke von $\{\beta_1, \dots, \beta_p\}$. Dann existieren $w_1, \dots, w_p \in$

T mit

$$w_j \gamma = \beta_j \quad \text{für } j = 1, \dots, p.$$

Wir definieren ein $t \in T$ durch

$$((x, y), i)t := \begin{cases} ((x, y), i)w_1 & \text{für } i \in \{1, \dots, n\} - \{i_1, \dots, i_p\} \\ ((x, y), i)w_j & \text{für } j = 1, \dots, p. \end{cases}$$

Dann gilt für $i \in \{1, \dots, n\} - \{i_1, \dots, i_p\}$:

$$\begin{aligned} ((x, y), i)t\gamma &= ((x, y), i)w_1\gamma \\ &= ((x, y), i)\beta_1 \\ &= ((x, y), i)t_{i_2} \cdot \dots \cdot t_{i_p}\delta \quad (\text{nach (4.13)}) \\ &= ((x, y), i)\delta \quad (\text{wegen } i \notin \{i_1, \dots, i_p\}), \end{aligned}$$

und für i_1, \dots, i_p :

$$\begin{aligned} ((x, y), i_j)t\gamma &= ((x, y), i_j)w_j\gamma \\ &= ((x, y), i_j)\beta_j \\ &= ((x, y), i_j)t_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_{j-1}}t_{i_{j+1}} \cdot \dots \cdot t_{i_p}\delta \quad (\text{nach (4.13)}) \\ &= ((x, y), i_j)\delta \quad (\text{wegen } i_j \notin \{i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_p\}). \end{aligned}$$

Somit ist $t\gamma = \delta$ bzw. $\gamma \leq \delta$. □

Also ist \mathcal{N}_α homotopieäquivalent zu $|\mathcal{M}_{<\alpha}^n|$.

4.2.2 Homotopietyp des Nerves

Zur Bestimmung des Homotopietypes ist eine andere Beschreibung von \mathcal{N}_α notwendig.

Lemma 4.6 *Für $gr(\alpha) \geq 2n$ ist \mathcal{N}_α homöomorph zu folgendem Simplicialkomplex Σ_α : Die Eckenmenge von Σ_α ist*

$$A := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,$$

wobei für $i \in \{1, \dots, n\}$ A_i die Menge aller Abbildungen $\varphi : (S - St_i) \longrightarrow (S - S\alpha)$ ist, die sich zu einer Abbildung von S nach S aus \mathcal{M} fortsetzen lassen. Bezeichnet man zu gegebenem $a_i \in A_i$ mit $B(a_i)$ die Menge $(S - St_i)a_i$, so bestehen die Simplizes von Σ_α aus den endlichen Teilmengen

$$\{a_{i_0}, \dots, a_{i_p}\} \subseteq A$$

von A , für die $i_\nu \neq i_\mu$ und $B(a_{i_\nu}) \cap B(a_{i_\mu}) = \emptyset$ für alle $0 \leq \nu, \mu \leq p$, $\nu \neq \mu$ ist.

BEWEIS: Wir betrachten die Abbildung

$$f : \{\beta \in \mathcal{M} \mid t_i \beta = \alpha \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n\}\} \longrightarrow A$$

$$f(\beta) := \bar{\beta}_i ,$$

wobei $\bar{\beta}_i$ die Einschränkung von β auf die Menge $S - St_i$ ist. Wegen (4.12) gilt $(S - St_i)\bar{\beta}_i \subseteq S - S\alpha$, d.h. $\bar{\beta}_i \in A$. Nun gibt es zu jedem a_i aus A ein eindeutig bestimmtes maximales Element β von $\mathcal{M}_{<\alpha}^n$ mit $\bar{\beta}_i = a_i$. (Auf der Menge St_i sei β definiert als $t_i^{-1}\alpha$, auf der Menge $S - St_i$ sei β die Abbildung a_i). f ist somit eine Bijektion. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} & \{\beta_0, \dots, \beta_p\} \in \mathcal{N}_\alpha \\ \Leftrightarrow & \text{für } \bar{\beta}_{i_0}, \dots, \bar{\beta}_{i_p} \text{ ist } i_\nu \neq i_\mu \text{ und } B(\bar{\beta}_{i_\nu}) \cap B(\bar{\beta}_{i_\mu}) = \emptyset \\ & \text{(s. Lemma 4.4)} \\ \Leftrightarrow & \{\bar{\beta}_{i_0}, \dots, \bar{\beta}_{i_p}\} \in \Sigma_\alpha . \end{aligned}$$

□

Wir betrachten nun zunächst folgende allgemeine Situation. Sei Γ ein Graph mit Eckenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq \{\{v, w\} \mid v, w \in V\}$. Aus Γ läßt sich ein Simplicialkomplex $\mathcal{K}(\Gamma)$ konstruieren: Die Eckenmenge von $\mathcal{K}(\Gamma)$ ist ebenfalls V , und für $p \geq 1$ sind die p -Simplizes von $\mathcal{K}(\Gamma)$ diejenigen Teilmengen $\{v_0, \dots, v_p\} \subseteq V$ mit

$$\{v_i, v_j\} \in E \quad \forall i \neq j, \quad 0 \leq i, j \leq p .$$

Das 1-Gerüst von $\mathcal{K}(\Gamma)$ ist gerade Γ . Besitzt Γ gewisse Eigenschaften, so ist $\mathcal{K}(\Gamma)$ homotopieäquivalent zu einem $(n-1)$ -dimensionalen Sphärenbouquet.

Lemma 4.7 *Sei Γ_n ein n -gefärbter Graph, V die Eckenmenge und E die Kantenmenge von Γ_n . Erfüllt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Eckenmenge V_i der Farbe i von Γ_n die Bedingungen*

1. $\#V_i \geq 2$
2. *Zu je $2(n-1)$ vielen Ecken $v^1, \dots, v^{2(n-1)}$ aus $V - V_i$ gibt es 2 Ecken v_i, w_i aus V_i mit*

$$\{v_i, v^j\}, \{w_i, v^j\} \in E \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq 2(n-1) ,$$

so ist $\mathcal{K}(\Gamma_n)$ homotopieäquivalent zu einem $(n-1)$ -dimensionalen Sphärenbouquet.

BEWEIS: Der Nachweis des behaupteten Homotopietypes von $\mathcal{K}(\Gamma_n)$ geschieht durch vollständige Induktion nach n . Wir benutzen dazu folgendes Kriterium aus [Qu], Abschnitt 8:

Für einen endlichdimensionalen Simplicialkomplex K mit $d = \dim K$ gilt:

$$(4.13) \quad K \simeq \bigvee_{j \in J} S^d \quad (S^d \text{ ist die } d\text{-Sphäre}) \text{ mit } J \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow K \text{ ist } (d-1)\text{-zusammenhängend und nicht zusammenziehbar.}$$

(Dabei bedeutet -1 -zusammenhängend: nicht leer).

$n = 1$: Es ist $\dim \mathcal{K}(\Gamma_1) = 0$ und $\#V = \#V_1 \geq 2$ (s. Voraussetzung 1.), d.h. es ist $\mathcal{K}(\Gamma_1) \neq \emptyset$ und nicht zusammenziehbar. Aus (4.14) folgt $\mathcal{K}(\Gamma_1) \simeq \bigvee S^0$.

$n = 2$: Wir zeigen zunächst: $\mathcal{K}(\Gamma_2)$ ist wegzusammenhängend. Seien $v, w \in V = V_1 \cup V_2$. Es gibt 2 Fälle:

- a) v, w stammen aus demselben V_i , $i \in \{1, 2\}$
- b) $v \in V_1$ und $w \in V_2$.

Im Fall a) existiert wegen Voraussetzung 2. ein $z \in V_j$, $j \neq i$ mit $\{v, z\}, \{w, z\} \in E$, d.h. (v, z, w) ist ein Weg von v nach w . Im Fall b) gibt es wieder wegen 2. zum einen ein $w' \in V_2$ mit $\{v, w'\} \in E$, und zum anderen ein $v' \in V_1$ mit $\{v', w\}, \{v', w'\} \in E$

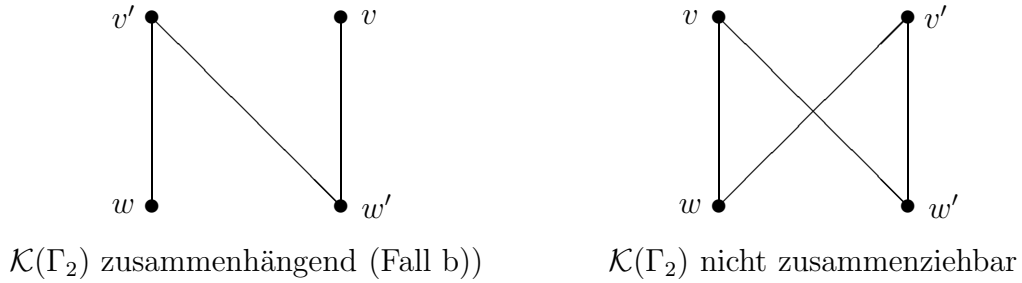


Abbildung 19:

(s. Abbildung 19, linker Teil), d.h. (v, w', v', w) verbindet v und w . Da es zu $v, v' \in V_1$ 2 Elemente $w, w' \in V_2$ gibt, die beide zu v und v' benachbart sind (s. Abbildung 19, rechter Teil), ist $\mathcal{K}(\Gamma_2)$ nicht zusammenziehbar ($\dim \mathcal{K}(\Gamma_2) = 1$). Aus (4.3) folgt: $\mathcal{K}(\Gamma_2) \simeq \bigvee S^1$.

$n \geq 3$: Wir nehmen an, die Behauptung gilt für $n - 1$. Der Komplex $\mathcal{K}(\Gamma_n)$ wird schrittweise aufgebaut. Wir beginnen mit dem zusammenziehbaren Unterkomplex

$$K_0 := st(v_1) \quad (\text{Stern von } v_1)$$

für eine Ecke $v_1 \in V_1$. Anschließend betrachten wir nach und nach für $i = 1, \dots, n$ den von K_{i-1} und den Ecken w_i aus V_i mit $\{v_1, w_i\} \notin E$ erzeugten vollen Unterkomplex K_i von $\mathcal{K}(\Gamma_n)$:

$$K_i := U_{\text{voll}}(K_{i-1}, \text{ alle } w_i \in V_i \text{ mit } \{v_1, w_i\} \notin E).$$

Wir erhalten also

$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n,$$

wobei für $j = 1, \dots, n$ in K_j alle Ecken aus $V_1 \cup \dots \cup V_{j-1} \cup V_j$ enthalten sind, aus $V_{j+1} \cup \dots \cup V_n$ jedoch nur die Ecken $v \in V$ mit $\{v_1, v\} \notin E$. Insbesondere ist $K_n = \mathcal{K}(\Gamma_n)$ (K_n enthält $V = V_1 \cup \dots \cup V_n$).

Jedes Simplex aus K_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), das nicht in K_{i-1} liegt, bezieht *genau eine* der Ecken w_i aus V_i mit $\{v_1, w_i\} \notin E$ mit ein. K_i entsteht somit aus K_{i-1} , indem man für jede dieser Ecken w_i einen Kegel über $\text{Link}_{K_{i-1}}(w_i)$ (den Link von w_i in K_{i-1}) hinzufügt. Wir zeigen nun mit Hilfe der Induktionsannahme:

Behauptung 1 Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und für jede Ecke $w_i \in V_i$ mit $\{v_1, w_i\} \notin E$ ist $\text{Link}_{K_{i-1}}(w_i)$ homotopieäquivalent zu einem $(n-2)$ -dimensionalen Sphärenbouquet.

Beweis: Wir betrachten die Fälle $i = 1$ und $i \in \{2, \dots, n\}$.

a) $i = 1$: Sei $w_1 \in V_1 - \{v_1\}$. Eine Ecke $v \in V$ ist genau dann in $\text{Link}_{K_0}(w_1)$, wenn sie sowohl zu v_1 als auch zu w_1 benachbart ist (insbesondere ist $v \notin V_1$). Mit

$$V'_j := \{v \in V_j \mid \{w_1, v\}, \{v_1, v\} \in E\}$$

für $j = 2, \dots, n$ ist somit $V' := V'_2 \cup \dots \cup V'_n$ die Eckenmenge von $\text{Link}_{K_0}(w_1)$. D.h. $\text{Link}_{K_0}(w_1) = \mathcal{K}(\Gamma_{n-1})$, wobei Γ_{n-1} der $(n-1)$ -gefärbte Untergraph von Γ_n mit Eckenmenge V' und Kantenmenge $E' = \{\{v, w\} \in E \mid v, w \in V'\}$ ist. Nach Voraussetzung gibt es zu v_1, w_1 ($\#\{v_1, w_1\} = 2 \leq 2(n-1)$ für alle $n \geq 2$) in jedem $V_j, j \neq 1$ mindestens 2 Elemente, die sowohl zu v_1 als auch zu w_1 benachbart sind. Also ist $\#V'_j \geq 2$. Weiterhin gibt es zu $2(n-2) = 2(n-1) - 2$ vielen Elementen $v^1, \dots, v^{2(n-2)}$ aus $V' - V'_j \subseteq V - V_j$ (ebenfalls nach Vor. 2.) 2 Elemente $v_j, w_j \in V_j$ mit

$$\begin{aligned} \{v_j, v^k\}, \{w_j, v^k\} &\in E \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq 2(n-2) \\ \{v_j, v_1\}, \{v_j, w_1\}, \{w_j, v_1\}, \{w_j, w_1\} &\in E. \end{aligned}$$

Daraus folgt $v_j, w_j \in V'_j$ und $\{v_j, v^k\}, \{w_j, v^k\} \in E'$ für $1 \leq k \leq 2(n-2)$. Somit ist Γ_{n-1} ein $(n-1)$ -gefärbter Graph, der die Voraussetzungen aus Lemma 4.7 erfüllt. Nach Induktionsannahme folgt: $\text{Link}_{K_0}(w_1) = \mathcal{K}(\Gamma_{n-1}) \simeq \vee S^{(n-2)}$.

b) $i \in \{2, \dots, n\}$: K_{i-1} enthält alle Ecken aus $V_1 \cup \dots \cup V_{i-1}$, jedoch für $i \leq j \leq n$ nur diejenigen $v_j \in V_j$, die zu $\text{st}(v_1)$ gehören. Die Eckenmenge von $\text{Link}_{K_{i-1}}(w_i)$ ist somit

$$V' = V'_1 \cup \dots \cup V'_{i-1} \cup V'_{i+1} \cup \dots \cup V'_n, \quad \text{wobei}$$

$$\begin{aligned} V'_j &:= \{v_j \in V_j \mid \{w_i, v_j\} \in E\} \quad \text{für } 1 \leq j \leq i-1 \\ V'_j &:= \{v_j \in V_j \mid \{v_1, v_j\}, \{w_i, v_j\} \in E\} \quad \text{für } i+1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Sei wieder Γ_{n-1} der von der Eckenmenge V' erzeugte Untergraph von Γ_n . Γ_{n-1} ist ein $(n-1)$ -gefärbter Graph, und analog zu Teil a) überlegt man sich, daß er die Voraussetzungen von Lemma 4.7 erfüllt. (Für $i+1 \leq j \leq n$ ist die Situation völlig analog zu Teil a), für $1 \leq j \leq i-1$ vereinfacht sie sich sogar). Somit ist auch hier $\text{Link}_{K_{i-1}}(w_i) \simeq \vee S^{(n-2)}$.

Wir wollen nun die Homologiegruppen von $\mathcal{K}(\Gamma_n) = K_n$ bestimmen und zeigen dazu:

Behauptung 2 Sei X ein Simplicialkomplex, K ein Unterkomplex und w eine Ecke aus $X - K$. Sind die Homologiegruppen $H_i(K) = 0$ für $1 \leq i < n-1$ und ist $\text{Link}_K(w)$ homotopieäquivalent zu einem $(n-2)$ -dimensionalen Sphärenbouquet, so gilt auch

$$H_i(K \cup C(w)) = 0 \quad 1 \leq i < n-1,$$

wobei $C(w)$ der Kegel über $\text{Link}_K(w)$ ist.

Beweis: Es ist $K \cap C(w) = \text{Link}_K(w)$. Aus dem Homotopietyp von $\text{Link}_K(w)$ folgt $H_j(K \cap C(w)) = 0$ für $1 \leq j < n-2$. Betrachten wir die Mayer-Vietoris-Sequenz für $1 \leq i < n-1$

$$\dots \rightarrow \underbrace{H_i(K)}_{=0} \oplus \underbrace{H_i(C(w))}_{=0} \rightarrow H_i(K \cup C(w)) \rightarrow \underbrace{H_{i-1}(K \cap C(w))}_{=0} \rightarrow \dots,$$

so folgt die Behauptung.

Gilt nun für ein $j \in \{0, \dots, n-1\}$ $H_i(K_j) = 0$ für $1 \leq i < n-1$, so läßt sich mit Hilfe von Behauptung 2 zeigen, daß für diese i auch $H_i(K_{j+1}) = 0$ ist:

K_{j+1} entsteht aus K_j durch Hinzufügen eines Kegels $C(w)$ über $\text{Link}_{K_j}(w)$ für jede Ecke $w \in W := \{v \in V_{j+1} \mid \{v_1, v\} \notin E\}$. Wir betrachten nun für eine endliche Teilmenge $T \subseteq W$ den Unterkomplex

$$U_T = K_j \cup \bigcup_{w \in T} C(w).$$

Da nach Behauptung 1 $\text{Link}_{K_j}(w) \simeq \vee S^{n-2}$ ist, folgt durch sukzessives Hinzufügen der $C(w)$ für $w \in T$ mit Hilfe von Behauptung 2

$$H_i(U_T) = 0 \quad \text{für alle } 1 \leq i < n-1.$$

Nun ist

$$K_{j+1} = \lim_{\rightarrow T} U_T,$$

wobei T die Menge aller endlichen Teilmengen von W durchläuft, d.h. $H_i(K_{j+1}) = 0$ für alle $1 \leq i < n-1$.

Da $K_0 = st(v_1)$ zusammenziehbar ist, also $H_i(K_0) = 0$ für alle $i \geq 1$, kann man diesen Prozeß beginnend bei K_0 für $j = 0, \dots, n-1$ iterieren und erhält

$$(4.14) \quad H_i(\mathcal{K}(\Gamma_n)) = H_i(K_n) = 0 \quad \text{für alle } 1 \leq i < n-1.$$

Um Informationen über die $(n-1)$ -dimensionalen Homologiegruppen von $\mathcal{K}(\Gamma_n)$ zu gewinnen, betrachten wir zu irgendeiner Ecke $w_1 \in V_1 - \{v_1\}$ die Mayer-Vietoris-Sequenz bezüglich des Unterkomplexes $K_0 \cup C$ mit $C = C(w_1, \text{Link}_{K_0}(w_1))$:

$$\dots \rightarrow H_{n-1}(K_0 \cup C) \rightarrow H_{n-2}(\underbrace{K_0 \cap C}_{\text{Link}_{K_0}(w_1)}) \rightarrow \underbrace{H_{n-2}(K_0) \oplus H_{n-2}(C)}_{=0} \rightarrow \dots$$

Nach Behauptung 1 ist $H_{n-2}(\text{Link}_{K_0}(w_1)) = \bigoplus \mathbb{Z}$, d.h. $H_{n-1}(K_0 \cup C) \neq 0$. Wegen $\dim \mathcal{K}(\Gamma_n) = n-1$ ist damit auch

$$(4.15) \quad H_{n-1}(\mathcal{K}(\Gamma_n)) \neq 0.$$

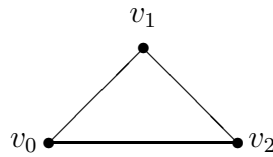
Ist $\mathcal{K}(\Gamma_n)$ für $n \geq 3$ einfach zusammenhängend, so folgt aus (4.15) (vgl. zum Beispiel [Sp], Hurewicz-Theorems):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\Gamma_n) \text{ ist } (n-2)\text{-zusammenhängend und} \\ \pi_{n-1}(\mathcal{K}(\Gamma_n)) \cong H_{n-1}(\mathcal{K}(\Gamma_n)) \quad \text{für } 1 \leq i \leq n-1. \end{aligned}$$

Wegen (4.16) ist $\pi_{n-1}(\mathcal{K}(\Gamma_n)) \neq 0$. Also ist $\mathcal{K}(\Gamma_n)$ ist $(n-2)$ -zusammenhängend und nicht zusammenziehbar. Aus (4.14) folgt wieder: $\mathcal{K}(\Gamma_n) \simeq \vee S^{n-1}$. Es bleibt zu zeigen:

Behauptung 3: Für $n \geq 3$ ist $\mathcal{K}(\Gamma_n)$ einfach zusammenhängend.

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall $n = 3$: Ein geschlossener Kantenweg

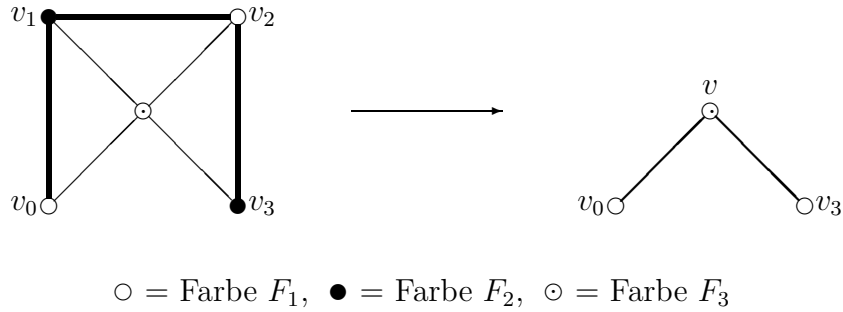


(v_0, v_1, v_2, v_0) , der 3 verschiedene Eckpunkte $v_0, v_1, v_2 \in V$ durchläuft, ist Rand eines 2-Simplexes aus $\mathcal{K}(\Gamma_n)$ und somit nullhomotop. Für einen geschlossenen Kantenweg $(v_0, v_1, \dots, v_m, v_0)$ mit $m+1 \geq 4$ verschiedenen Eckpunkten aus V zeigen wir, daß dieser homotop zu einem Kantenweg $(v'_0, v'_1, \dots, v'_{m-1}, v'_0)$ mit m Eckpunkten ist:

Seien v_0, v_1, v_2, v_3 die ersten 4 Eckpunkte von $(v_0, v_1, \dots, v_m, v_0)$. Gehört v_0 zur Farbe F_1 , v_1 zur Farbe F_2 , so gibt es für v_2 und v_3 nur die 4 Möglichkeiten

1. v_2 gehört zur Farbe F_1 , v_3 zur Farbe F_2
2. v_2 gehört zur Farbe F_1 , v_3 zur Farbe F_3
3. v_2 gehört zur Farbe F_3 , v_3 zur Farbe F_2
4. v_2 gehört zur Farbe F_3 , v_3 zur Farbe F_1 .

Zu 1.: Zu den 4 Elementen v_0, v_1, v_2, v_3 außerhalb der Farbe F_3 gibt es ein $v \in V$



der Farbe F_3 , das zu jedem dieser 4 Elemente benachbart ist (Voraussetzung 2.). Da somit $\{v_0, v_1, v\}$, $\{v_1, v_2, v\}$ und $\{v_2, v_3, v\}$ jeweils 2-Simplizes aus $\mathcal{K}(\Gamma_3)$ sind, ist der Kantenzug (v_0, v_1, v_2, v_3) homotop zu (v_0, v, v_3) .

In den restlichen 3 Fällen kann man mit ähnlichen Überlegungen zeigen, daß (v_0, v_1, v_2, v_3) homotop zu einem Kantenzug der Form (v_0, v, v_3) ist. Somit ist jeder geschlossene Kantenzug aus $\mathcal{K}(\Gamma_3)$ nullhomotop (iteriere das Verfahren bis nur noch 3 Eckpunkte durchlaufen werden), d.h. $\pi_1(\mathcal{K}(\Gamma_3)) = 0$.

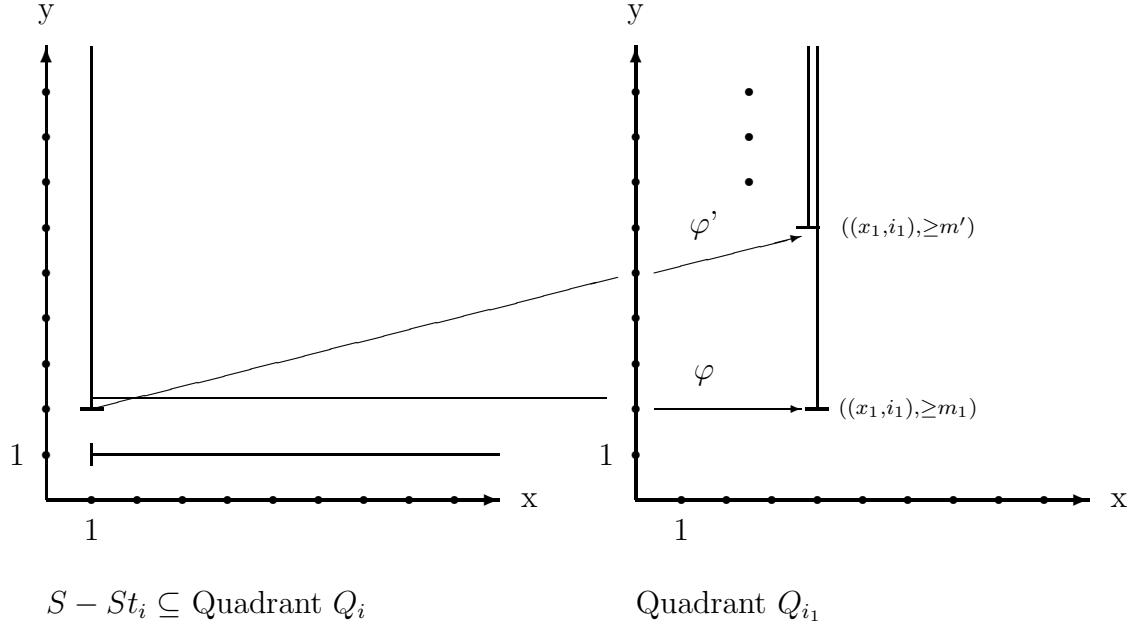
$n \geq 4$: Man überlegt sich, daß jeder geschlossene Kantenzug $(v_0, v_1, \dots, v_m, v_0)$ aus $\mathcal{K}(\Gamma_n)$ homotop ist zu einem Weg $(v'_0, v'_1, \dots, v'_m, v'_0)$, dessen Eckpunkte höchstens 3 verschiedene Farben besitzen. Damit ist der Fall zurückgeführt auf $n = 3$. \square

Mit Hilfe des letzten Lemmas läßt sich der Homotopietyp von Σ_α bestimmen, denn ist Γ_α das 1-Gerüst von Σ_α , so gilt $\Sigma_\alpha = \mathcal{K}(\Gamma_\alpha)$.

Lemma 4.8 Γ_α erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 4.7, d.h. $\mathcal{K}(\Gamma_\alpha) = \Sigma_\alpha$ ist homotopieäquivalent zu einem $(n - 1)$ -dimensionalen Sphärenbouquet.

BEWEIS: Ordnet man der Eckenmenge A_i die Farbe i zu, so ist Γ_α ein n -gefärbter Graph. Da schon jeweils eine Menge der Form $((x_1, i_1), \geq m_1)$ und $((y_1, j_1), \geq l_1)$ aus $S - S\alpha$ (und es gibt jeweils $gr(\alpha) \geq 2n$ viele) die Konstruktion unendlich vieler $\varphi : (S - St_i) \rightarrow (S - S\alpha)$ ermöglicht, die zu einer Abbildung von S nach S aus \mathcal{M} fortgesetzt werden können (s. Abbildung 20), ist für alle $i = 1, \dots, n$

$$\# A_i = \infty \geq 2.$$



Schon für die Menge $\{((1,y),i)|y \in \mathbb{N}\} \subseteq S - St_i$ gibt es für die Wahl von φ beliebig viele Möglichkeiten, indem man die Verschiebung in Richtung der y-Achse variiert.

Abbildung 20: Anzahl der Elemente in A_i

Seien nun $a^1, \dots, a^{2(n-1)}$ $2(n-1)$ viele Elemente aus $A - A_i$. Wir müssen zeigen, daß es in A_i mindestens zwei Elemente a_i und b_i gibt mit

$$B(a_i) \cap B(a^k) = B(b_i) \cap B(a^k) = \emptyset$$

für alle $k = 1, \dots, 2(n-1)$. Dazu weisen wir nach, daß in der Menge $(S - S\alpha) - (B(a^1) \cup \dots \cup B(a^{2(n-1)}))$ noch genügend „Platz“ vorhanden ist, um sogar beliebig viele Abbildungen aus A_i zu finden, deren Bildmenge in $(S - S\alpha) - (B(a^1) \cup \dots \cup B(a^{2(n-1)}))$ enthalten ist.

Wir wissen nach Lemma 3.4:

$$S - S\alpha = \left(\bigcup_{\nu=1}^{gr(\alpha)} ((x_\nu, i_\nu), \geq m_\nu) \cup ((y_\mu, j_\mu), \geq l_\mu) \right) \cup P.$$

Die Bildmenge eines a^k „verbraucht“ von $S - S\alpha$ höchstens eine der Mengen $((x_{\nu_k}, i_{\nu_k}), \geq m_{\nu_k})$, eine der Mengen $((y_{\mu_k}, j_{\mu_k}), \geq l_{\mu_k})$ sowie eine endliche Menge E_k . Somit ist

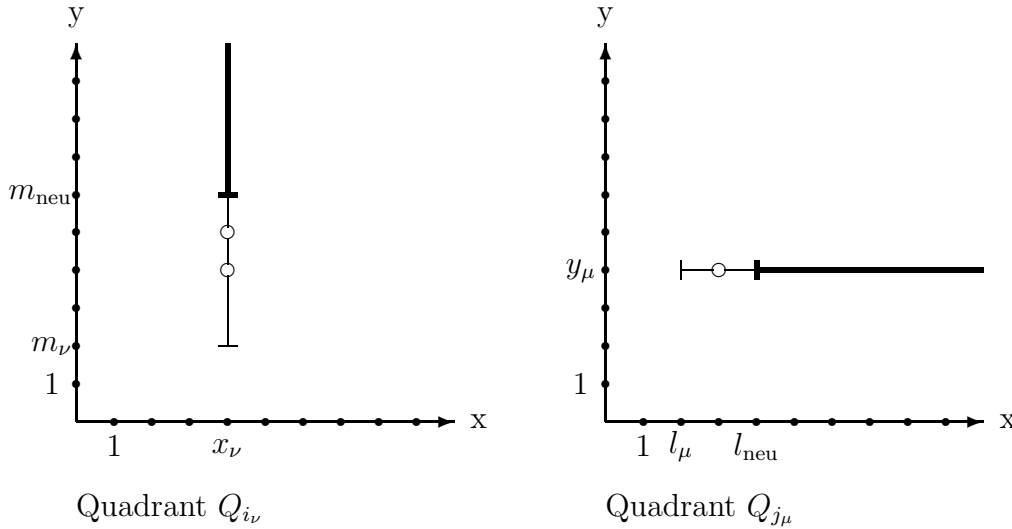
$$\begin{aligned}
 (4.16) \quad & B(a^1) \cup \dots \cup B(a^{2(n-1)}) \\
 & \subseteq ((x_{\nu_1}, i_{\nu_1}), \geq m_{\nu_1}) \cup \dots \cup ((x_{\nu_{2(n-1)}}, i_{\nu_{2(n-1)}}), \geq m_{\nu_{2(n-1)}}) \cup \\
 & ((y_{\mu_1}, j_{\mu_1}), \geq l_{\mu_1}) \cup \dots \cup ((y_{\mu_{2(n-1)}}, j_{\mu_{2(n-1)}}), \geq l_{\mu_{2(n-1)}}) \cup \\
 & E = E_1 \cup \dots \cup E_{2(n-1)}.
 \end{aligned}$$

Im schlechtesten Fall sind dabei die $(x_{\nu_1}, i_{\nu_1}), \dots, (x_{\nu_{2(n-1)}}, i_{\nu_{2(n-1)}})$, sowie die $(y_{\mu_1}, j_{\mu_1}), \dots, (y_{\mu_{2(n-1)}}, j_{\mu_{2(n-1)}})$ alle verschieden. Da nach Voraussetzung $gr(\alpha) \geq 2n$, also $gr(\alpha) - 2(n-1) \geq 2$ ist, gibt es ein $\nu \in \{1, \dots, gr(\alpha)\} - \{\nu_1, \dots, \nu_{2(n-1)}\}$ und ein $\mu \in \{1, \dots, gr(\alpha)\} - \{\mu_1, \dots, \mu_{2(n-1)}\}$.

Für ein solches ν bzw. μ ist $(x_\nu, i_\nu) \neq (x_{\nu_k}, i_{\nu_k})$ und $(y_\mu, j_\mu) \neq (y_{\mu_k}, j_{\mu_k})$ für $k = 1, \dots, 2(n-1)$. Da Mengen der Form $((x, i), \geq m)$ und $((x, i'), \geq m')$ im Falle $(x, i) \neq (x, i)'$ zueinander disjunkt sind (dasselbe gilt für die Mengen der Form $((y, j), \geq l)$), folgt daher aus (4.17)

$$((x_\nu, i_\nu), \geq m_\nu) \cup ((y_\mu, j_\mu), \geq l_\mu) \cap (B(a^1) \cup \dots \cup B(a^{2(n-1)})) \subseteq E,$$

wobei E eine endliche Menge ist. Wir wählen nun $m_{\text{neu}}, l_{\text{neu}} \in \mathbb{N}$, sodaß



Die Kreise stellen die endliche Menge $((x_\nu, i_\nu), \geq m_\nu) \cup ((y_\mu, j_\mu), \geq l_\mu) \cap (B(a^1) \cup \dots \cup B(a^{2(n-1)}))$ dar. Die fettgedruckten Linien entsprechen den Mengen $((x_\nu, i_\nu), \geq m_{\text{neu}})$ bzw. $((y_\mu, j_\mu), \geq l_{\text{neu}})$.

Abbildungung 21: Wahl von m_{neu} und l_{neu}

$$((x_\nu, i_\nu), \geq m_{\text{neu}}) \cup ((y_\mu, j_\mu), \geq l_{\text{neu}}) \cap (B(a^1) \cup \dots \cup B(a^{2(n-1)})) = \emptyset$$

ist (s. Abbildung 21). Wie bei dem Nachweis von $\# A_i = \infty$ zu Beginn des Beweises überlegt man sich, daß es beliebig viele $a_i \in A_i$ gibt, deren Bildmenge $B(a_i)$ in $((x_\nu, i_\nu), \geq m_{\text{neu}}) \cup ((y_\mu, j_\mu), \geq l_{\text{neu}})$ enthalten ist und daher leeren Schnitt mit $B(a^1) \cup \dots \cup B(a^{2(n-1)})$ besitzt. \square

Wir haben somit gezeigt:

Satz 4.9 Die Gruppe G_n ist vom Typ $(\text{FP})_{n-1}$ und nicht vom Typ $(\text{FP})_n$. Für $n \geq 3$ ist G_n endlich präsentiert.

Weiterhin ergibt sich aus diesem Satz (wie in Abschnitt 2.2 erläutert):

Korollar 4.10 *Die Gruppe \tilde{G}_n ist vom Typ $(\text{FP})_{n-1}$ und für $n \geq 3$ endlich präsentiert.*

Literatur

- [Br1] **K.S. Brown.** *Finiteness properties of groups.* Journal of Pure and Applied Algebra 44 (1987), 45-75
- [Br2] **K.S. Brown.** *Cohomology of groups.* Springer Verlag New York-Heidelberg-Berlin (1987)
- [Bi] **R. Bieri.** Homological dimension of discrete groups. Queen Mary College Mathematics Notes, London 1976/81
- [Bj] **A. Björner.** *Homotopy type of posets and lattice complementation.* Journal of Combinatorial Theory, Series A 30, 90-100 (1981)
- [Hou] **C.H. Houghton.** *The first cohomology of a group with permutation module coefficients.* Arch. Math. 31 (1978/1979) 254-258
- [Qu] **D. Quillen.** *Homotopy properties of the poset of nontrivial p -Subgroups of a group.* Advanced in Mathematics 28, 101-128 (1978)
- [Ro] **D.J.F. Robinson.** *A course in the theory of groups.* Springer Verlag New York-Heidelberg-Berlin (1982)
- [Sp] **E.H. Spanier.** *Algebraic topology.* Mc Graw-Hill Book company